

Haute École Pédagogique Vaud  
Master en enseignement secondaire II

Mémoire professionnel :

# Autour des projections orthogonales de l'icosaèdre et du dodécaèdre réguliers

**Rédaction du mémoire :**

François Margot

Gavin Seal

**Mémoire soutenu en :**

Juin 2016

**Co-directeurs du mémoire :**

Michel Deruaz

Thierry Dias

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Projection orthogonale de l'icosaèdre posé</b>	<b>5</b>
3.1	Approche géométrique . . . . .	5
3.1.1	Construction exacte . . . . .	5
3.1.2	Construction approximative . . . . .	7
3.2	Approche trigonométrique . . . . .	9
3.2.1	Construction exacte . . . . .	9
3.2.2	Construction approximative . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Projection orthogonale du dodécaèdre suspendu</b>	<b>12</b>
4.1	Approche géométrique . . . . .	12
4.1.1	Construction exacte . . . . .	12
4.1.2	Construction approximative . . . . .	14
4.2	Approche trigonométrique . . . . .	18
4.2.1	Construction exacte . . . . .	18
4.2.2	Construction approximative . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Exercices</b>	<b>24</b>

## 1 Introduction

Les solides de Platon, soit les solides convexes réguliers (solide convexe dont toutes les faces sont identiques et régulières), sont : le tétraèdre (4 sommets, 4 faces triangulaires), le cube (8 sommets, 6 faces carrées), l'octaèdre (8 sommets, 8 faces triangulaires), l'icosaèdre (12 sommets, 20 faces triangulaires) et le dodécaèdre (20 sommets, 12 faces pentagonales).

Notre projet se concentre sur deux de ces solides, l'icosaèdre et le dodécaèdre, et poursuit deux buts spécifiques. Le premier est d'étudier l'exactitude de constructions de certaines projections orthogonales de l'icosaèdre et du dodécaèdre que l'on peut trouver sur internet, et qui nous ont été transmises par Thierry Dias. Le second est de proposer des exercices pouvant tirer parti des constructions exactes des projections orthogonales, et de suggérer des pistes pour le développement d'exercices de manipulation réelle de ces polyèdres en trois dimensions.

Le document est organisé de la manière suivante. La Section 2 présente quelques préliminaires et conventions utilisées dans le reste du texte. La Section 3 étudie la construction de la projection orthogonale de l'icosaèdre sur un plan. On y montre qu'une construction particulière est inexacte de deux manières différentes : par la géométrie descriptive dans la Section 3.1, et par la trigonométrie dans la Section 3.2. À la fin de chacune des Sections 3.1.1 et 3.2.1, une marche-à-suivre pour la construction exacte à la règle et au compas est proposée.

La structure de la Section 4 est similaire pour l'étude de la construction de la projection orthogonale du dodécaèdre sur un plan. On y montre qu'une construction particulière est inexacte de deux manières différentes : géométriquement dans la Section 4.1, et trigonométriquement dans la Section 4.2). Une construction exacte à la règle et au compas est aussi proposée à la fin des Sections 4.1.1 et 4.2.1.

Finalement, une série d'exercices est développée dans la Section 5.

## 2 Préliminaires

**Terminologie.** Les solides considérés ici sont tous des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^3$ . On utilise les termes usuels de sommets, arêtes, et faces pour les faces de dimension 0, 1, et 2 respectivement.

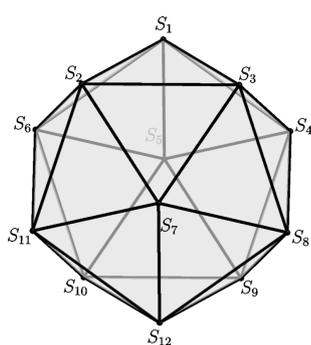
Le plan de la feuille est le plan sur lequel sont projetés orthogonalement les solides. Ce plan est appelé le *plan horizontal*, et les segments, droites ou plans orthogonaux à ce plan horizontal seront dits *verticaux*. La projection orthogonale d'éléments de l'espace sur le plan horizontal est appelée la *vue de dessus* de ces éléments. (Le solide est supposé être situé entre l'"observateur" et le plan horizontal.)

**Conventions de notation.** Pour des points  $A, B, C, \text{ etc.}$  dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , la droite contenant  $A$  et  $B$  est notée  $AB$ , le segment d'extrémités  $A$  et  $B$  est noté  $[AB]$ , la demi-droite d'extrémité

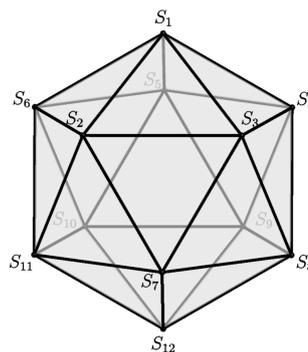
$A$  est, elle, désignée par  $[AB$ . La distance entre deux points  $A$  et  $B$  sera notée par  $\overline{AB}$ , et le vecteur ayant son origine en  $A$  et son extrémité en  $B$  sera noté  $\overrightarrow{AB}$ . L'angle en  $B$  formé par deux demi-droites  $[BA$  et  $[BC$  sera noté  $\angle ABC$ . Les polyèdres seront simplement dénotés par la concaténation des noms de leurs sommets, libellés dans  $\mathbb{R}^2$  dans le sens naturel (on parlera du triangle  $ABC$ , du quadrilatère  $ABCD$ , etc.).

Les solides sont représentés en perspective axonométrique dans  $\mathbb{R}^3$  avec des sommets  $S_1, S_2$ , etc. Lorsqu'une projection est dessinée, les sommets sont libellés  $P_1, P_2$ , etc., où  $P_i$  est la projection de  $S_i$ . Les points auxiliaires de constructions sont libellés avec d'autres lettres et nombres ( $A_1, Q_2, T_3$ , etc.).

**Position de l'icosaèdre dans  $\mathbb{R}^3$ .** Dans la suite, on utilise deux positions de l'icosaèdre pour effectuer des calculs ou calculer sa vue de dessus. La première de ces positions, appelée *icosaèdre posé*, est celle où l'icosaèdre a deux de ses faces horizontales (voir Figure 1(a)). La seconde, appelée *icosaèdre suspendu*, est celle où le solide a deux sommets antipodaux reliés par un segment vertical (voir Figure 1(b)).



(a) Icosaèdre posé. Les faces  $S_1S_2S_3$  et  $S_9S_{10}S_{11}$  sont horizontales.



(b) Icosaèdre suspendu. Le segment reliant les sommets antipodaux  $S_1$  et  $S_{12}$  est vertical.

FIGURE 1 – Vues dans  $\mathbb{R}^3$  en perspective d'un icosaèdre en position particulière.

**Position du dodécaèdre dans  $\mathbb{R}^3$ .** Pour le dodécaèdre, on utilisera surtout la position suspendue, définie de manière similaire à ci-dessus (voir Figure 2).

**Rotation vue de dessus.** Dans la partie gauche de la Figure 3, une rotation d'un pentagone autour d'un axe est représentée, avec sa projection orthogonale sur le plan horizontal. Dans la partie droite, seule la vue de dessus de cette rotation est représentée. Dans ce dernier cas, tous les points suivent, vus de dessus, une trajectoire orthogonale à l'axe. Noter aussi que les points de l'axe de rotation restent fixes, et les droites sont envoyées sur des droites. Nous parlerons aussi dans ce cas d'un *relèvement* du pentagone horizontal.

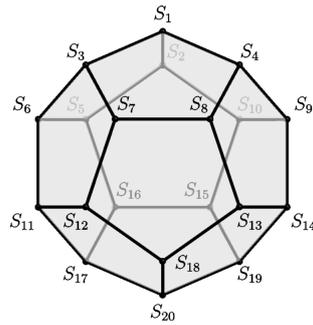


FIGURE 2 – Vue dans  $\mathbb{R}^3$  en perspective d'un dodécaèdre suspendu. Le segment reliant les sommets antipodaux  $S_1$  et  $S_{20}$  est vertical.

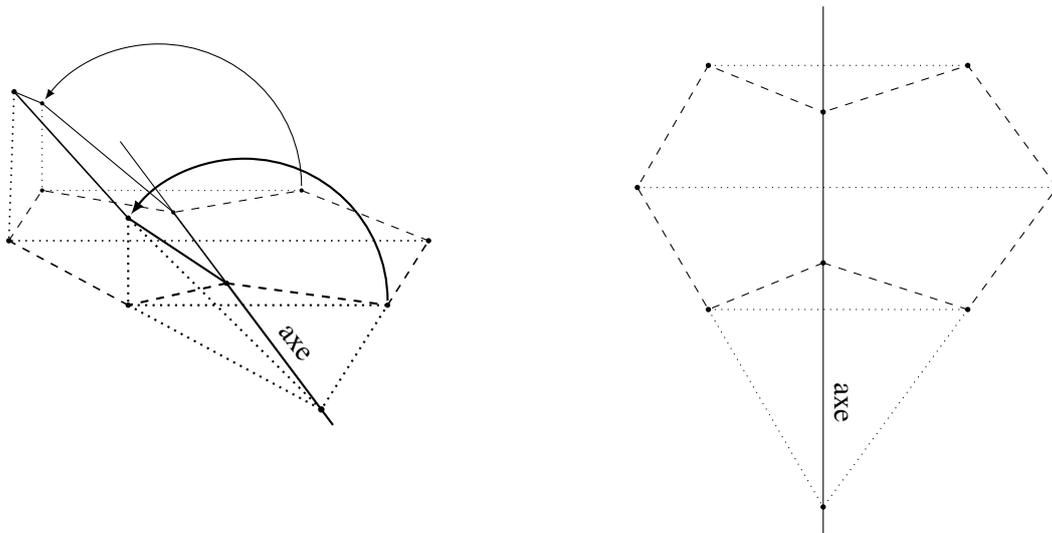


FIGURE 3 – Vue dans  $\mathbb{R}^3$  de la rotation d'un pentagone autour d'un axe horizontal (à gauche) et la projection correspondante (à droite).

**Principe et construction.** Les “principes” détaillés dans ce qui suit justifient la représentation de la vue de dessus proposée. Les “constructions” qui suivent proposent une marche à suivre pour obtenir cette vue du dessus en réduisant le nombre de constructions annexes (telles que la construction de médiatrices de segments, de bissectrices d'angles, ou autres).

### 3 Projection orthogonale de l'icosaèdre posé

#### 3.1 Approche géométrique

##### 3.1.1 Construction exacte

Le principe donné ci-dessous est adapté de la construction proposée dans Javary (1881–1882) pour l'icosaèdre posé.

**Principe.** Le polygone limitant cinq faces de l'icosaèdre ayant un sommet commun est un pentagone régulier convexe : par exemple, les cinq faces ayant  $S_1$  comme sommet forment

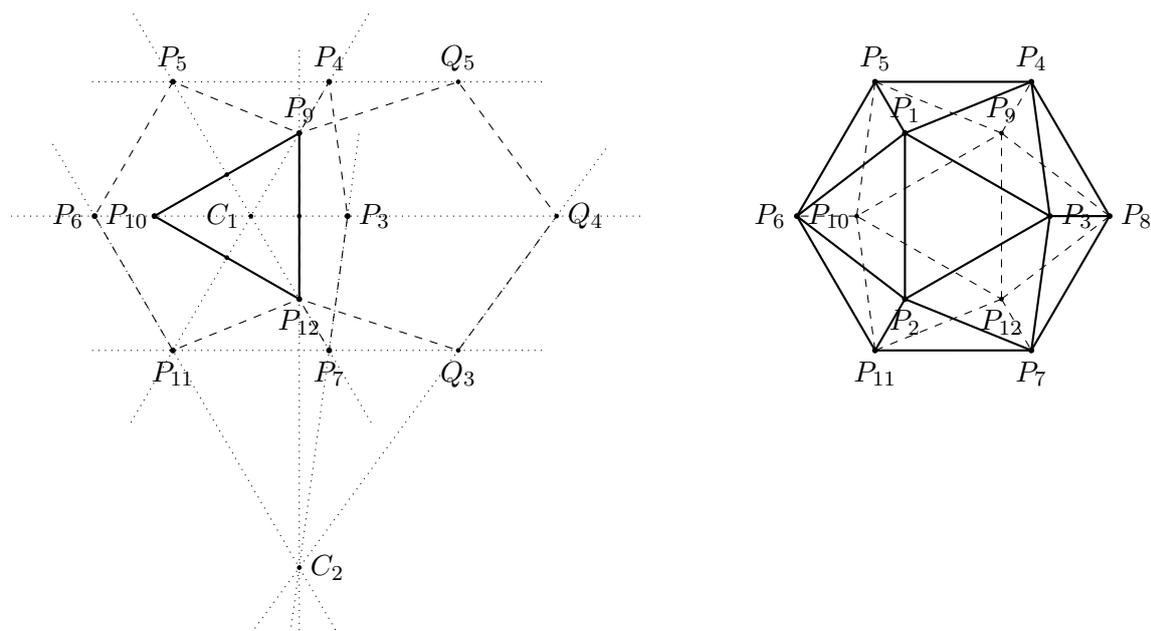


FIGURE 4 – Construction de la projection d’un icosaèdre posé.

le pentagone  $S_2S_3S_4S_5S_6$  (voir Figure 1(b)). La longueur d’une arête de ce pentagone est la longueur d’une arête de l’icosaèdre.

On considère la face de l’icosaèdre  $S_9S_{10}S_{12} = P_9P_{10}P_{12}$  appartenant au plan horizontal ; cette face sera appelée le *triangle de base* et son centre de symétrie sera le point  $C_1$ .

Soit  $P_9P_{12}Q_3Q_4Q_5$  un pentagone régulier appartenant au plan horizontal ayant  $[P_9P_{12}]$  comme arête commune avec le triangle de base (voir la partie gauche de la Figure 4). Lors de sa rotation autour de  $P_9P_{12}$ , le pentagone s’identifiera à deux des pentagones réguliers formés par des arêtes de l’icosaèdre, soit  $S_3S_7S_{12}S_9S_4$  et  $S_5S_6S_{11}S_{12}S_9$ . La vue de dessus de la rotation du sommet  $Q_3$  est un segment perpendiculaire à  $P_9P_{12}$ , et par raison de symétrie, les sommets  $S_7$  et  $S_{11}$  de l’icosaèdre que  $Q_3$  rencontre lors de sa rotation sont projetés sur les droites supports des hauteurs du triangle de base  $P_9P_{10}P_{12}$  (pour s’en convaincre, considérer la rotation d’un autre pentagone autour de  $P_{10}P_9$  ou  $P_{10}P_{12}$ ) ; la projection orthogonale de ces sommets sont  $P_7$  et  $P_{11}$ . De même, la rotation du sommet  $Q_5$  détermine deux autres sommets vus de dessus, les sommets  $P_4$  et  $P_5$  sur les mêmes deux hauteurs du triangle de base.

La droite  $Q_3Q_4$  intersecte  $P_9P_{12}$  en un point  $C_2$  invariant lors de la rotation du pentagone  $P_9P_{12}Q_3Q_4Q_5$  ; le point  $P_3$  sera donc sur la droite  $C_2P_7$  et sur la hauteur de  $P_9P_{10}P_{12}$  issue de  $P_{10}$ . De même, le point  $P_6$  sera sur la droite  $C_2P_{11}$  et sur la même hauteur.

Dans la partie droite de la Figure 4, les points  $P_8, P_1,$  et  $P_2$  ont été obtenus à partir de  $P_6, P_{12},$  et  $P_9$  par une symétrie centrale de centre  $C_1$ , et les projections des arêtes ont été tracées.

**Construction.** La construction précédente est très facile à réaliser avec Geogebra par exemple ; en effet, ce logiciel inclut une fonctionnalité qui permet de tracer un pentagone régulier convexe à partir de deux points (ces points seraient  $P_9$  et  $P_{12}$  dans la construction ci-dessus). De plus, une

fois qu'un des points de l'hexagone extérieur est obtenu, par exemple le point  $P_7$ , un cercle centré en  $C_1$  et de rayon  $\overline{C_1P_7}$  permet d'obtenir les autres sommets de l'hexagone en l'intersectant avec les hauteurs du triangle de base.

Sans outil informatique, la construction de l'icosaèdre posé, et en particulier du point  $P_7$ , peut aussi s'obtenir en évitant le dessin complet du pentagone  $P_9P_{12}Q_3Q_4Q_5$  et en exploitant la construction du nombre d'or comme suit (voir la Figure 5).

- (i) Les projections des sommets des deux faces horizontales sont les sommets d'un hexagone régulier.

Commencer par tracer un hexagone régulier convexe  $P_9P_1P_{10}P_2P_{12}P_3$  de côté de longueur 1 unité. Dessiner le triangle équilatéral  $P_9P_{10}P_{12}$  et ses hauteurs (la longueur d'une arête de ce triangle est donc de  $\sqrt{3}$  unités).

- (ii) Pour  $P_7$ , nous utilisons que  $\angle C_2P_{12}Q_3 = \frac{2\pi}{5}$ , où les points  $C_2$  et  $Q_3$  sont ceux de la Figure 4. Comme une arête de l'icosaèdre est de longueur  $\sqrt{3}$ , nous cherchons à construire, avec un minimum d'effort, la distance  $\sqrt{3} \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  sur  $[P_9C_2]$ . Les points  $A_1$  jusqu'à  $A_4$  définis ci-dessous sont des points annexes de cette construction.

Soit  $A_1$  le pied de la hauteur issue de  $P_{10}$ . Le cercle de rayon  $\overline{P_9P_{12}}$  centré en  $A_1$  intersecte la demi-droite  $[P_{10}A_1]$  en un point  $A_2$  : la distance  $\overline{P_9A_2}$  est donc de  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Le cercle centré en  $P_9$  et de rayon  $\overline{P_9A_2}$  intersecte  $[P_9P_{12}]$  en un point  $A_3$  : la distance  $\overline{A_1A_3}$  est donc de  $\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)$ . Le cercle de rayon  $\overline{A_1A_3}$  centré en  $P_{12}$  intersecte la demi-droite  $[A_1A_3]$  en un point  $A_4$  : la moitié de la distance  $\overline{P_{12}A_4}$  vaut donc  $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sqrt{3} \cos(\frac{2\pi}{5})$ . La médiatrice de  $[P_{12}A_4]$  intersecte la hauteur de  $P_9P_{10}P_{12}$  issue de  $P_{12}$  en  $P_7$ .

- (iii) Les intersections des hauteurs de  $P_9P_{10}P_{12}$  avec le cercle centré en  $C_1$  et de rayon  $\overline{C_1P_7}$  donnent les autres sommets de l'icosaèdre (partie droite de la Figure 5).

### 3.1.2 Construction approximative

Une construction approximative de la projection de l'icosaèdre suspendu nous a été proposées par (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016). Dans cette section, nous étudions l'erreur d'approximation de cette construction. Pour cela, nous devons d'abord établir certaines mesures dans les constructions exactes — et justifier le choix de ces mesures pour estimer l'erreur cherchée.

**Principe.** Pour la projection orthogonale de l'icosaèdre avec une face parallèle au plan de projection horizontal, il suffit de déterminer le rapport  $\frac{R_1}{R_2}$  entre le rayon  $R_1$  du cercle circonscrit à la face triangulaire horizontale et le rayon  $R_2$  du cercle circonscrit à l'hexagone extérieur, enveloppe convexe de la projection (les deux cercles sont représentés en pointillés dans la Figure 6).

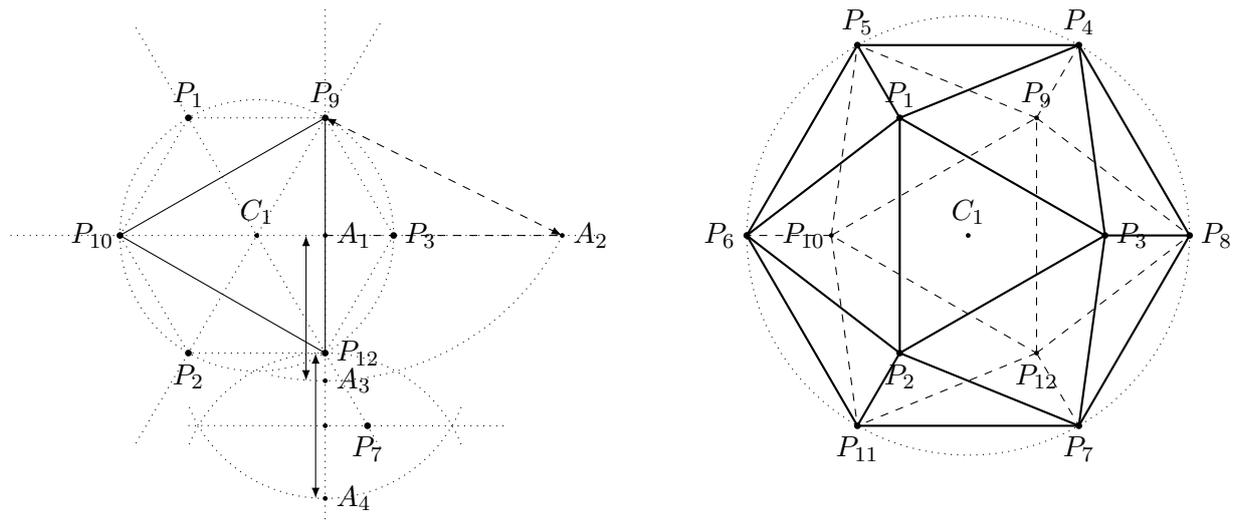


FIGURE 5 – Construction alternative de la projection d'un icosaèdre posé.

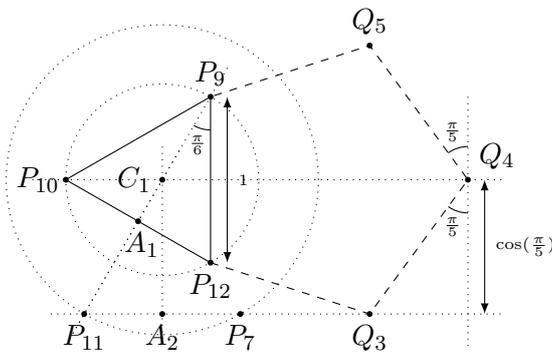


FIGURE 6 – Calcul des rayons des cercles de construction de la projection de l'icosaèdre posé.

Par raisons de symétrie, un point sur un seul de ces cercles détermine entièrement la projection de l'icosaèdre.

**Valeurs exactes.** Dans la Figure 6, nous reprenons l'icosaèdre de la Figure 4 proposée dans le "principe" de la Section 3.1.1 ; nous prenons aussi comme unité la longueur d'une arête (par exemple  $\overline{P_9P_{12}}$ ). La hauteur  $\overline{P_9A_1}$  du triangle de base  $P_9P_{10}P_{12}$  est de longueur  $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ; comme cette hauteur est aussi la médiane du triangle, le rayon  $R_1 = \overline{C_1P_9}$  est de longueur  $\frac{2}{3} \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . De plus, la distance  $\overline{C_1A_2}$  de  $C_1$  à la droite  $Q_3P_{11}$  est de  $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$  ; comme  $C_1A_2P_{11}$  est rectangle en  $A_2$ , nous avons  $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\overline{C_1A_2}}{\overline{C_1P_{11}}}$ , donc

$$R_2 = \overline{C_1P_{11}} = \frac{\overline{C_1A_2}}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \cong 0.934 \quad \text{et}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.618.$$

**Estimation de l'erreur.** La construction de l'approximation à la projection propose directement un rapport de  $\frac{5}{8}$  (voir Section 3.2.2 pour plus de détails). Numériquement, nous obtenons une différence de rapports de

$$\left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{5}{8} \right| \cong 0.007,$$

soit moins de 1% d'erreur — une très bonne approximation pour une représentation graphique. Notons en passant que  $\frac{5}{8}$  est la meilleure approximation fractionnaire de  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  parmi toutes les fractions avec dénominateur plus petit ou égal à 12, voir Shreevatsa R (4 novembre 2011). La meilleure approximation fractionnaire “suivante”, c'est-à-dire celle dont le dénominateur est l'infimum des majorants stricts entiers de 8, est  $\frac{8}{13}$ , qui donnerait une erreur de l'ordre de 0.0026.

## 3.2 Approche trigonométrique

### 3.2.1 Construction exacte

Considérons un icosaèdre dans  $\mathbb{R}^3$  ayant une face horizontale. La projection de cet icosaèdre sur un plan horizontal est donnée dans la Figure 7.

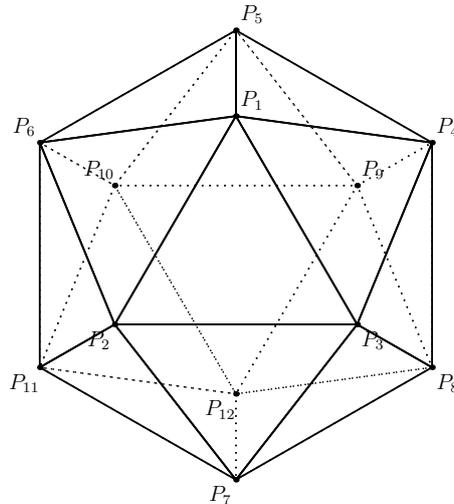
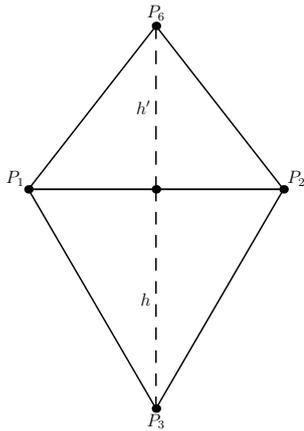


FIGURE 7 – Projection d'un icosaèdre dans un plan horizontal.

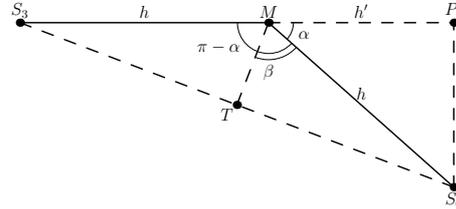
L'angle diédral d'un polyèdre  $Q$  est l'angle entre deux faces de  $Q$  ayant en commun une arête de  $Q$  mesuré à l'intérieur de  $Q$ . On peut utiliser cet angle pour calculer les changements de longueurs de projections sur le plan horizontal de segments situés sur une face horizontale de  $Q$  ou sur une des faces adjacentes.

Par exemple, considérons la face horizontale d'un icosaèdre  $S_1S_2S_3$  projetée sur un plan horizontal sur  $P_1P_2P_3$  dans la Figure 8(a).

Comme montré dans la Figure 8(b), l'angle diédral de l'icosaèdre est  $\pi - \alpha$  et peut être calculé comme suit. Prenons la longueur d'une arête de l'icosaèdre comme unité. Comme  $S_1S_2S_3$  est



(a) Deux faces adjacentes de l'icosaèdre projetées sur un plan horizontal ;  $P_1P_2P_3$  est la projection de la face horizontale  $S_1S_2S_3$ .



(b) Les deux faces  $S_1S_2S_3$  et  $S_1S_2S_6$  dans une coupe verticale passant par  $S_3$ , par le milieu  $M$  de  $S_1S_2$  et par  $S_6$ . Comme montré dans le texte, l'angle  $\alpha$  est  $\arcsin(\frac{2}{3})$ .

FIGURE 8

un triangle équilatéral, on a  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Remarquons que le segment  $[S_3S_6]$  est une diagonale du pentagone régulier  $S_2S_3S_4S_5S_6$ . Comme les arêtes de ce dernier sont des arêtes de l'icosaèdre, elles ont toutes longueur 1 et la longueur de la diagonale  $[S_3S_6]$  du pentagone est le nombre d'or  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Soit  $T$  le point milieu du segment  $[S_3S_6]$ . On a

$$\begin{aligned} \overline{TM} &= \sqrt{h^2 - (\overline{TS_6})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - \frac{6+2\sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \cos(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}.$$

Il s'ensuit que

$$\sin(2\beta) = \sin(\pi - \alpha) = 2 \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

Comme l'angle diédral  $\pi - \alpha$  est plus grand que  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $\alpha = \arcsin(\frac{2}{3})$ . Ceci termine le calcul de l'angle diédral.

On remarque que la hauteur  $h$  de la face triangulaire  $S_1S_2S_6$  se projette comme un segment de longueur  $h' = \cos(\alpha) \cdot h = \cos(\arcsin(\frac{2}{3})) \cdot h = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot h$ , puisqu'un triangle rectangle avec une hypoténuse de longueur 3 et une cathète de longueur 2 (et donc un angle valant  $\arcsin(\frac{2}{3})$ ) a son autre cathète de longueur  $\sqrt{5}$ .

Ayant fixé la longueur de l'arête de l'icosaèdre à 1, on a  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $h' = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot h$ , il est aisé de construire la projection de l'icosaèdre dans un plan horizontal :

- (i) Tracer un cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $\frac{2}{3} \cdot h$  ;
- (ii) Tracer un hexagone régulier convexe avec sommets  $P_1 P_{10} P_2 P_{12} P_3 P_9$  sur  $C$  ;
- (iii) Tracer un cercle  $C'$  de centre  $O$  et de rayon  $\frac{1}{3} \cdot h + h' = \frac{1+\sqrt{5}}{3} \cdot h$  ;
- (iv) Tracer un hexagone régulier convexe avec sommets  $P_5 P_6 P_{11} P_7 P_8 P_4$  sur  $C'$  tel que  $O, P_1,$  et  $P_5$  soient alignés ;
- (v) Relier les 12 sommets ainsi créés comme sur la Figure 9.

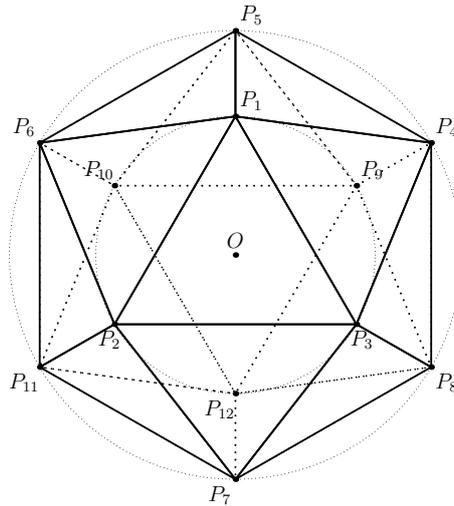


FIGURE 9 – Construction de la projection d'un icosaèdre dans un plan horizontal.

### 3.2.2 Construction approximative

La construction décrite par (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) n'est pas exacte. Tous les sommets se trouvent sur deux cercles, tout comme dans la construction exacte de la Section 3.2.1. On montre que le quotient de ces deux rayons dans la construction de (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) n'est pas égal au quotient des deux rayons de la construction exacte. En partant du dessin de la construction donnée (voir Figure 10), il est immédiat que si l'on suppose que les petits cercles de construction (en trait plein dans la figure) ont un rayon unitaire, alors les deux rayons des cercles contenant tous les sommets sont  $R_1 = \overline{OP_1} = 5$  et  $R_2 = \overline{OP_7} = 8$ .

On remarque que dans la construction exacte donnée dans la Section 3.2.1 les deux rayons sont calculés en fonction de la longueur  $h$ , on a

$$R_1 = \frac{2}{3} \cdot h \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{3} \cdot h.$$

On a donc que le quotient  $\frac{R_2}{R_1}$  a pour valeur  $\frac{8}{5} = 1.6$  pour la construction de (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) alors que cette valeur est de  $\frac{1+\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618$  dans la construction de la Section 3.2.1.

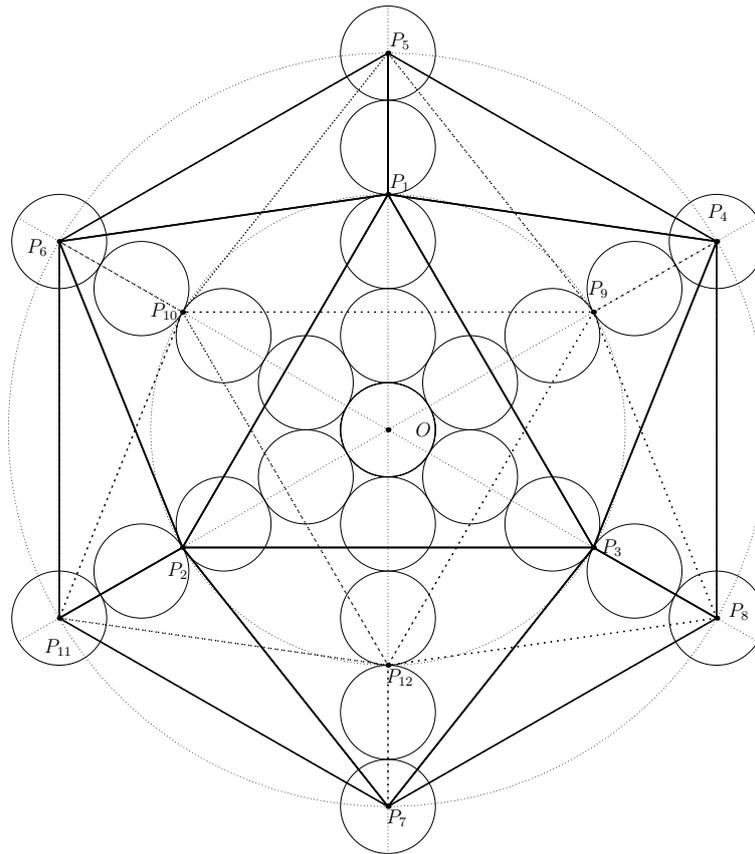


FIGURE 10 – Approximation de la projection d’un icosaèdre dans un plan horizontal.

## 4 Projection orthogonale du dodécaèdre suspendu

### 4.1 Approche géométrique

#### 4.1.1 Construction exacte

Le principe de relèvement exploité dans la construction de la projection de l’icosaèdre (Section 3.1.1) peut être utilisé *mutatis mutandis* dans d’autres cas. Nous illustrons cela ici avec le dodécaèdre suspendu.

Le dodécaèdre à représenter vu de dessus possède le sommet  $S_{20} = P_{20}$  sur le plan horizontal.

**Principe.** Considérons dans le plan horizontal un pentagone régulier convexe  $P_{20}Q_2Q_3Q_4Q_5$  ; dans la Figure 11, en haut à gauche, deux autres pentagones horizontaux disposés régulièrement autour du point  $P_{20}$  sont représentés. Les axes de symétries envoyant  $P_{20}Q_2Q_3Q_4Q_5$  sur les autres pentagones sont appelés  $b$  et  $c$ . Une rotation d’axe  $a$  parallèle à  $Q_3Q_4$  et passant par  $P_{20}$  envoie le pentagone sur une des faces du dodécaèdre. Par raison de symétrie, les sommets  $Q_2$  et  $Q_5$  seront envoyés, vus de dessus, sur les projections  $P_{18}$  et  $P_{19}$  situées sur  $b$  et  $c$ , respectivement. Les droites  $Q_2Q_3$  et  $Q_4Q_5$  intersectent  $a$  en  $C_2$  et  $C_3$ , respectivement, et sont envoyées par la rotation sur les droites  $C_2P_{18}$  et  $C_3P_{19}$ , ce qui permet de déterminer  $P_{13}$  et  $P_{14}$  sur les droites

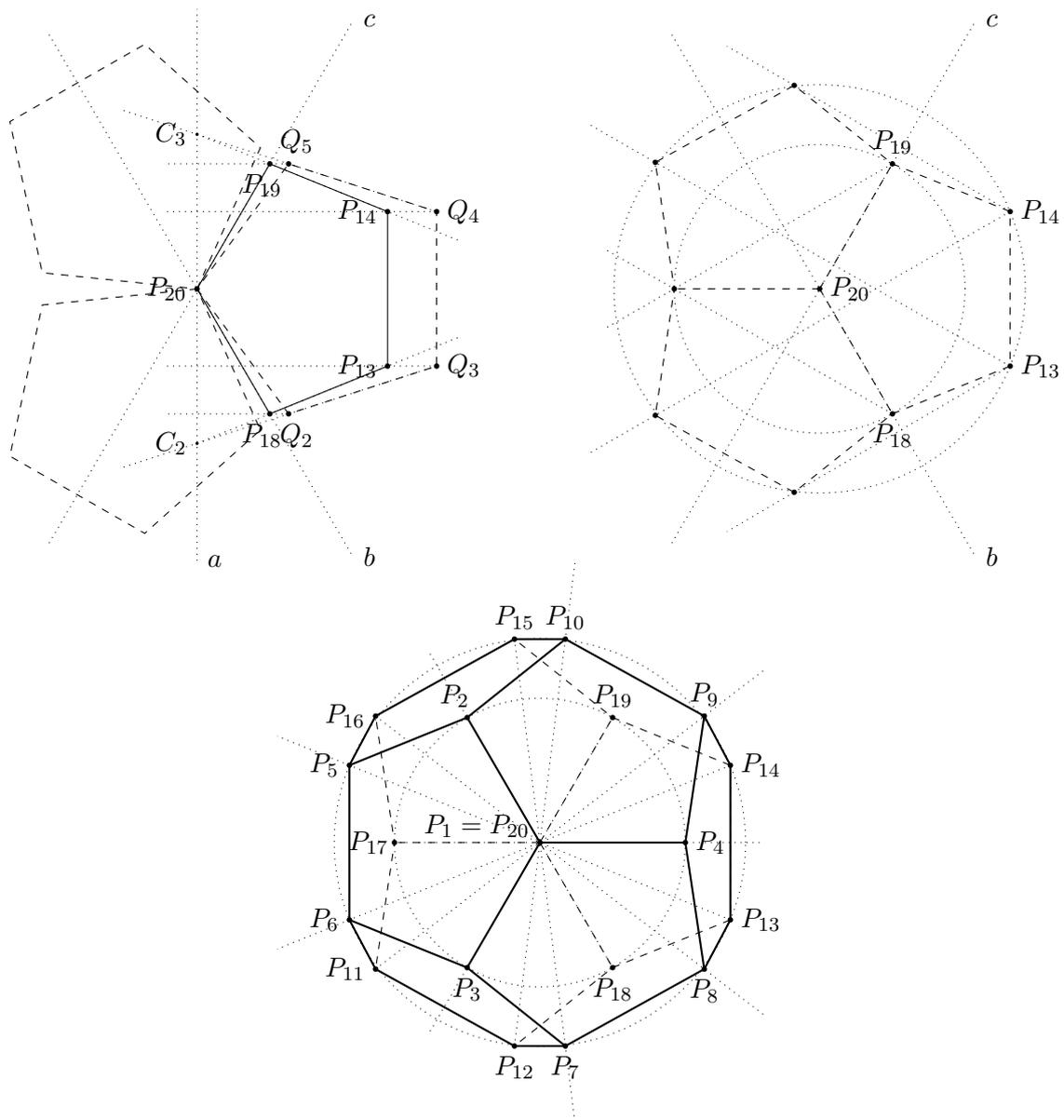


FIGURE 11 – Construction de la projection d’un dodécaèdre posé.

orthogonales à  $a$  par  $Q_3$  et  $Q_4$ .

Par des symétries d’axes  $b$  et  $c$  on construit les vues de dessus des deux autres faces ayant  $S_{20}$  comme sommet (Figure 11, en haut à droite).

Finalement, par une symétrie centrale de centre  $P_{20}$ , on construit les autres sommets de la projection orthogonale du dodécaèdre, et on trace les arêtes (bas de la Figure 11).

**Construction.** Comme pour l’icosaèdre, la construction précédente est très facile à réaliser avec un outil informatique adéquat. Néanmoins, une fois les points  $P_{14}$  et  $P_{19}$  déterminés, tous les autres sommets sont rapidement obtenus en exploitant les symétries d’axes  $b$  et  $a$ , et la symétrie de centre  $P_{20}$ . La construction de  $P_{14}$  et  $P_{19}$  peut aussi s’obtenir en évitant le dessin complet du pentagone  $P_{20}Q_2Q_3Q_4Q_5$  et en exploitant la construction du nombre d’or (voir

Figure 12), comme suit.

- (i) Les projections des sommets adjacents aux deux extrémités du diamètre vertical du dodécaèdre sont les sommets d'un hexagone régulier.

Commencer par tracer un hexagone régulier convexe  $P_{18}P_4P_{19}P_2P_{17}P_3$  d'arête 1 unité, de centre  $P_{20}$ . La longueur d'une arête du dodécaèdre dont la projection va être construite sera de  $\frac{\sqrt{3}}{\varphi}$ , où  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  est le nombre d'or (en effet, le segment horizontal  $[S_{18}S_{19}]$  est projeté en vraie grandeur sur  $[P_{18}P_{19}]$ , où  $\overline{P_{18}P_{19}} = \sqrt{3}$ ; de plus, pour obtenir la longueur d'un côté d'un pentagone régulier à partir de la longueur d'une de ses diagonales, il suffit de diviser la longueur de la diagonale par  $\varphi$ ).

- (ii) Nous allons construire le sommet  $P_{13}$  qui permettra de déterminer par symétries les autres sommets de la projection du dodécaèdre. Pour cela, nous utilisons que le triangle  $P_{20}Q_3C_2$  (où les points  $Q_3$  et  $C_2$  sont définis dans la Figure 11) est isocèle en  $Q_3$ . En effet, on a  $\angle P_{20}Q_3Q_2 = \frac{\pi}{5}$  (il s'agit de la moitié de l'angle au centre de  $\frac{2\pi}{5}$  déterminé par deux sommets adjacents d'un pentagone régulier), et l'angle entre la hauteur de  $P_{20}Q_3C_2$  issue de  $Q_3$  et  $[Q_3C_2]$  vaut  $\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$  : la hauteur issue de  $Q_3$  est donc la bissectrice de  $\angle P_{20}Q_3Q_2$ , ce qui suffit pour conclure. De plus, la distance entre  $P_{20}$  et le pied de la hauteur issue de  $Q_3$  est la moitié de la longueur d'une arête du dodécaèdre. La longueur  $\overline{P_{20}C_2}$  vaut donc  $\frac{\sqrt{3}}{\varphi}$  : une fois ce segment  $[P_{20}C_2]$  construit (parallèlement à  $P_{18}P_{19}$ ), le point  $P_{13}$  sera à l'intersection de sa médiatrice et de  $C_2P_{18}$ . Les points  $A_1$  et  $A_2$  seront des points annexes utilisés pour construire la longueur voulue.

Tracer une parallèle  $a$  à  $P_{18}P_{19}$  par  $P_{20}$ , et soit  $A_1$  l'intersection de  $a$  avec  $P_2P_{19}$ . Le cercle de rayon  $2\overline{P_{20}A_1}$  centré en  $P_{20}$  intersecte la demi-droite  $[P_{20}P_{17}]$  en un point  $A_2$  : la distance  $\overline{A_1A_2}$  vaut donc  $\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Le cercle centré en  $A_1$  et de rayon  $\overline{A_1A_2}$  intersecte  $[A_1P_{20}]$  au point  $C_2$  : la distance  $\overline{P_{20}C_2}$  vaut  $(\sqrt{5} - 1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\varphi}$  ; sa moitié est donc la moitié de la longueur d'une arête du dodécaèdre. La médiatrice de  $[P_{20}C_2]$  intersecte la droite  $C_2P_{18}$  en  $P_{13}$ .

- (iii) Le cercle centré en  $P_{20}$  et de rayon  $\overline{P_{20}P_{13}}$  permet de construire les autres sommets du dodécaèdre en exploitant les symétries d'axes  $P_{20}P_{19} = c$  et  $P_{20}P_{18} = b$ , et la symétrie de centre  $P_{20}$  (partie droite de la Figure 12).

#### 4.1.2 Construction approximative

Une construction approximative de la projection du dodécaèdre posé nous a été proposée par (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016). Dans cette section, nous étudions l'erreur d'approximation de cette construction. Pour cela, nous devons d'abord établir certaines mesures dans les constructions exactes — et justifier le choix de ces mesures pour estimer l'erreur cherchée.

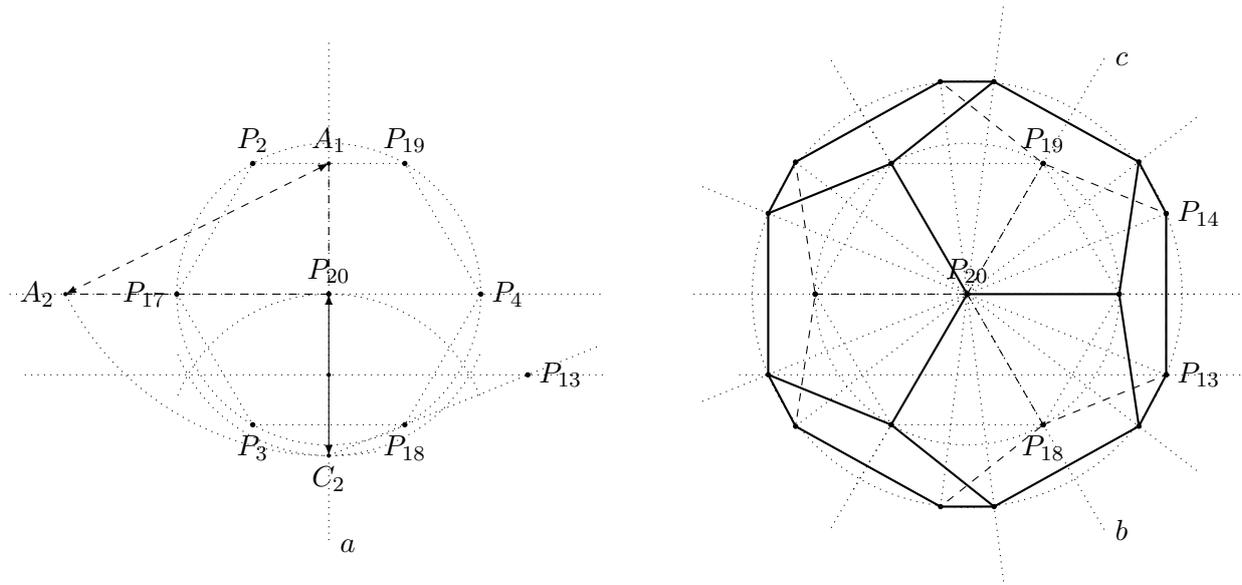


FIGURE 12 – Construction alternative de la projection d’un dodécaèdre posé.

**Principe.** Dans le cas de la construction approximative de la projection du dodécaèdre, les symétries de la figure impliquent que deux points sont nécessaires pour déterminer entièrement la projection : un sommet sur le cercle circonscrit à la projection, et un sommet sur le cercle passant par un sommet intérieur.

**Coordonnées exactes.** Dans la Figure 13, nous reprenons la figure du dodécaèdre proposée dans le “principe” de la Section 4.1.1 ; nous prenons aussi comme unité la longueur d’une arête (par exemple  $\overline{Q_3Q_4}$  ci-dessous). Vue du dessus, la rotation d’axe  $a$  du pentagone est une affinité d’axe  $a$ , de direction perpendiculaire à l’axe, et qui envoie le point  $Q_5$  sur le point  $P_{19}$ . Soit le point  $A_1$  à l’intersection de  $a$  et de  $Q_5P_{19}$ . On observe que  $\overline{A_1P_{19}} = \tan(\frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{5})$ , et comme  $\overline{A_1Q_5} = \sin(\frac{\pi}{5})$ , le rapport de l’affinité est

$$\frac{\overline{A_1P_{19}}}{\overline{A_1Q_5}} = \frac{\tan(\frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})} = \frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{\pi}{5})}.$$

En considérant l’intersection  $A_2$  de  $a$  avec  $Q_4P_{14}$ , on obtient

$$\overline{A_2P_{14}} = \frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{\pi}{5})} \cdot \overline{A_2Q_4} = \frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{\tan(\frac{\pi}{5})} \cdot \frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{10})} = \frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{2 \tan(\frac{\pi}{5}) \tan(\frac{\pi}{10})}$$

(où on a utilisé que  $\angle Q_4C_2P_4$  est l’angle au centre de  $\angle Q_4P_{20}P_4$  pour le cercle circonscrit au pentagone  $P_{20}Q_2Q_3Q_4Q_5$ ). Les coordonnées des points  $P_{19}$  et  $P_{14}$  dans un système d’axes centré en  $O = P_{20}$  et d’axe  $Ox = P_{20}P_4$  sont donc

$$P_{19} = \left( \tan(\frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{5}); \cos(\frac{\pi}{5}) \right) \quad \text{et} \quad P_{14} = \left( \frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{2 \tan(\frac{\pi}{5}) \tan(\frac{\pi}{10})}; \frac{1}{2} \right).$$

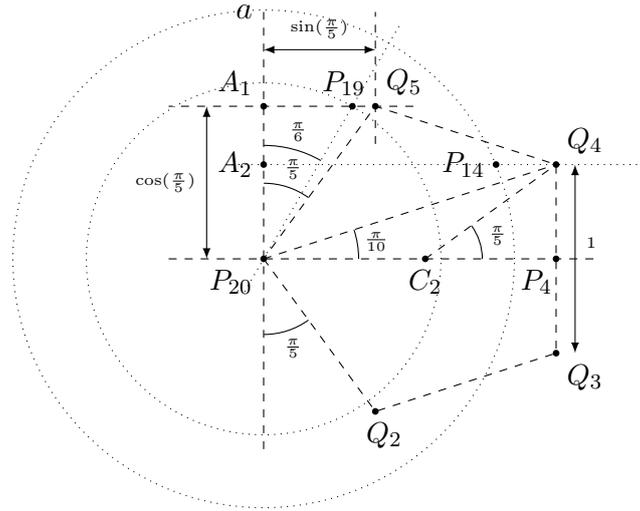


FIGURE 13 – Calcul des rayons des cercles de construction de la projection du dodécaèdre suspendu.

En utilisant Pythagore, on en déduit les rayons  $R_1$  et  $R_2$  des cercles intérieur et extérieur utilisés dans la construction de la projection :

$$R_1 = \overline{P_{20}P_{19}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{5} + 1) \cong 0.93 \quad \text{et} \quad R_2 = \overline{P_{20}P_{14}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sqrt{5} + 3)} \cong 1.32.$$

**Coordonnées approximatives.** Pour obtenir les coordonnées des points de la construction approximative de la projection orthogonale du dodécaèdre proposée par (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) qui correspondent aux points  $P_{19}$  et  $P_{14}$  de la construction exacte, nous considérerons que les arêtes du dodécaèdre sont de longueur 1. Dans la Figure 14, les deux triangles  $Q_1Q_5Q_9$  et  $Q_3Q_7Q_{11}$  à la base de la construction ont comme barycentre le point  $P_1$ , et les triangles  $Q_2Q_6Q_{10}$  et  $Q_4Q_8Q_{12}$  leurs images respectives par une homothétie de centre  $P_1$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  : les sommets de chacune des images se situent au milieu des côtés de l'autre triangle d'origine. Soient  $P'_{15}$  et  $P'_{19}$  les intersections respectives de  $Q_1Q_{10}$  avec  $Q_2Q_{11}$  et  $P_1Q_{11}$  ; Soit  $A_1$  le pied de la hauteur de  $Q_{10}P'_{15}Q_2$  issue de  $P'_{15}$ , et  $A_2$  l'intersection de  $P_1Q_{11}$  avec  $Q_2Q_{10}$ . Finalement, soit  $P'_{14}$  l'intersection de  $Q_2Q_9$  avec  $Q_7Q_{11}$ .

Dans la construction approximative, le point  $Q_2$  est le milieu de la projection d'une arête horizontale du dodécaèdre, et  $P'_{15}$  en est une extrémité. On a donc  $\overline{Q_2P'_{15}} = \overline{Q_{10}P'_{14}} = \frac{1}{2}$ . Considérons encore  $P'_{16}$ , le symétrique de  $P'_{15}$  par rapport à  $P_1Q_1$ , c'est-à-dire que  $P'_{16}$  est à l'intersection de  $Q_{11}Q_3$  et de  $Q_1Q_6$  et  $\overline{P'_{15}P'_{16}} = 1$ . Soient  $A_3$  et  $A_4$  les intersections respectives de  $Q_1Q_5$  et  $Q_1Q_9$  avec  $Q_6Q_{10}$ , et  $A_5$  et  $A_6$  les intersections respectives de  $Q_1Q_5$  et  $Q_1Q_9$  avec  $Q_{11}Q_3$ . Comme  $\frac{Q_1A_3}{Q_1A_5} = \frac{5}{2}$ , le triangle  $Q_1A_3A_4$  est l'image de  $Q_1A_5A_6$  par une homothétie de centre  $Q_1$  et de rapport  $\frac{5}{2}$  ; en particulier,  $\overline{Q_6Q_{10}} = \frac{5}{2}\overline{P'_{15}P'_{16}} = \frac{5}{2}$ .

Pour trouver les coordonnées de  $P'_{19} = (\overline{P_1P'_{19}} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}); \overline{P_1P'_{19}} \cdot \sin(\frac{\pi}{3}))$ , il faut calculer  $\overline{P_1P'_{19}}$ .

Pour cela, écrivons  $\overline{P_1P'_{19}} = \overline{P_1A_2} + \overline{A_2P'_{19}}$ , et notons que  $\overline{P_1A_2}$  est le tiers de la longueur de la médiane  $[Q_6A_2]$  du triangle  $Q_2Q_6Q_{10}$ , donc

$$\overline{P_1A_2} = \frac{1}{3}\overline{Q_6A_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{6} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

D'un autre côté, avec  $\overline{Q_{10}A_1} = \overline{Q_{10}Q_2} - \overline{A_1Q_2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4}$  et  $\frac{\overline{P'_{19}A_2}}{\overline{P'_{15}A_1}} = \frac{\overline{Q_{10}A_2}}{\overline{Q_{10}A_1}}$ , on a

$$\overline{P'_{19}A_2} = \overline{P'_{15}A_1} \cdot \frac{\overline{Q_{10}A_2}}{\overline{Q_{10}A_1}} = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{5}{18} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Finalement,  $\overline{P_1P'_{19}} = \overline{P_1A_2} + \overline{A_2P'_{19}} = \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{10}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ . Les coordonnées de  $P'_{19}$  dans un système d'axes centré en  $O = P_1$  et d'axe  $Ox = P_1Q_9$  sont donc

$$P'_{19} = \left(\frac{10}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right); \frac{10}{9} \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{5}{9} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right); \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \frac{5}{6}\right).$$

Pour les coordonnées de  $P'_{14}$ , observons que  $\overline{P_1Q_{10}}$  est  $\frac{2}{3}$  de la longueur d'une médiane de  $Q_2Q_6Q_{10}$ . Donc  $\overline{P_1Q_{12}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et

$$P'_{14} = \left(\frac{5}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right); \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \frac{1}{2}\right).$$

En utilisant Pythagore, on en déduit les rayons  $R_1$  et  $R_2$  des cercles intérieur et extérieur utilisés dans la construction de la projection :

$$R_1 = \overline{P_{20}P'_{19}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \cong 0.96 \quad \text{et} \quad R_2 = \overline{P_{20}P'_{14}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \cong 1.53.$$

**Estimation de l'erreur.** Pour évaluer l'erreur de l'approximation, nous cherchons un coefficient  $\lambda$ , tel que homothétie de centre  $P_1$  et de rapport  $\lambda$  appliqué à la construction exacte minimise les distances au carré entre les points  $P_{19}$ ,  $P'_{19}$  et  $P_{14}$ ,  $P'_{14}$  : nous voulons minimiser simultanément  $\|\lambda \overrightarrow{P_1P_{19}} - \overrightarrow{P_1P'_{19}}\|^2$  et  $\|\lambda \overrightarrow{P_1P_{14}} - \overrightarrow{P_1P'_{14}}\|^2$ . Si

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right); \cos\left(\frac{\pi}{5}\right); \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \cot\left(\frac{\pi}{5}\right) \cot\left(\frac{\pi}{10}\right); \frac{1}{2}\right), \\ \vec{w} &= \left(\frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \frac{5}{6}; \frac{5}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

dénotent le vecteur  $\vec{v}$  dont les deux premières composantes sont celles de  $\overrightarrow{P_1P_{19}}$  et les deux suivantes celles de  $\overrightarrow{P_1P_{14}}$ , et le vecteur  $\vec{w}$  construit de la même manière avec  $\overrightarrow{P_1P'_{19}}$  et  $\overrightarrow{P_1P'_{14}}$ , la projection orthogonale  $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{w})$  de  $\vec{w}$  sur  $\vec{v}$  sera de la forme  $\lambda \vec{v}$  (avec  $\lambda = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\vec{v} \bullet \vec{v}}$ ). Une estimation possible de l'erreur sera donné par l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

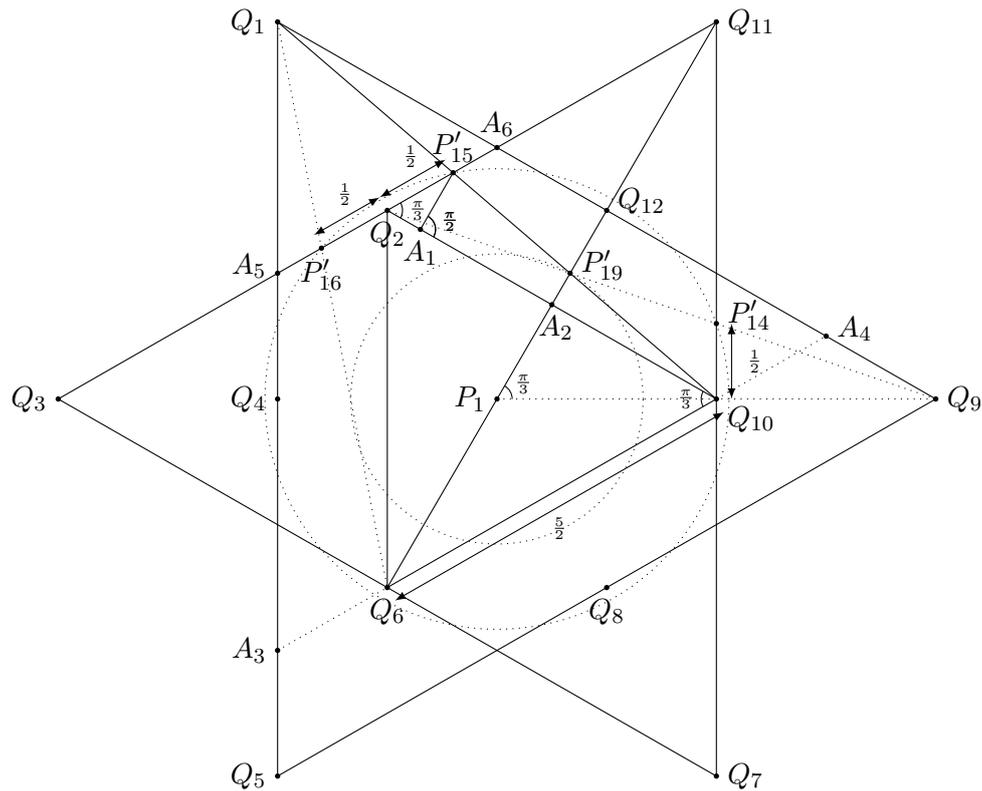


FIGURE 14 – Construction approximative de la projection du dodécaèdre suspendu.

Après calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{v} \bullet \vec{w} &= \frac{49+25\sqrt{5}}{36} & \vec{v} \bullet \vec{v} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \vec{w} \bullet \vec{w} &= \frac{88}{27} \\ \lambda &= \frac{11+13\sqrt{5}}{36} \cong 1.113 & \alpha &\cong 4.02^\circ. \end{aligned}$$

L'interprétation de cette erreur est plus délicate que dans le cas de l'icosaèdre. Afin de mieux visualiser cette différence, nous représentons dans la Figure 15 la meilleure projection exacte (c'est-à-dire l'image de la projection exacte d'arête 1 unité par une homothétie de centre  $P_1$  et de rapport  $\lambda \cong 1.113$ ) en pointillés, avec la construction approximative superposée.

## 4.2 Approche trigonométrique

### 4.2.1 Construction exacte

Considérons un dodécaèdre suspendu dans  $\mathbb{R}^3$ . La projection de ce dodécaèdre sur un plan horizontal est donnée dans la Figure 16.

Tous les sommets du dodécaèdre  $D$  dans  $\mathbb{R}^3$  se trouvent sur une sphère de rayon  $R$  et toutes ses faces sont des pentagones réguliers. Pour un de ces pentagones, appelons  $h$  la distance dans  $\mathbb{R}^3$  entre un des sommets et le côté opposé du pentagone.

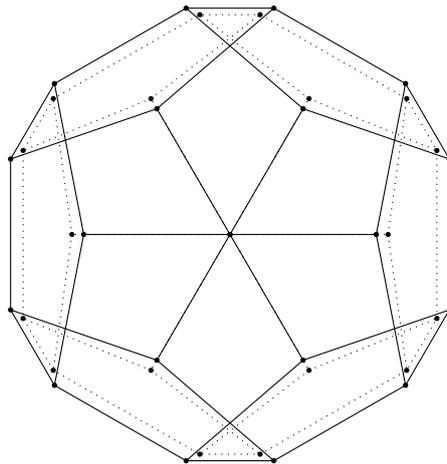


FIGURE 15 – Représentation de l’erreur dans la construction du dodécaèdre suspendu.

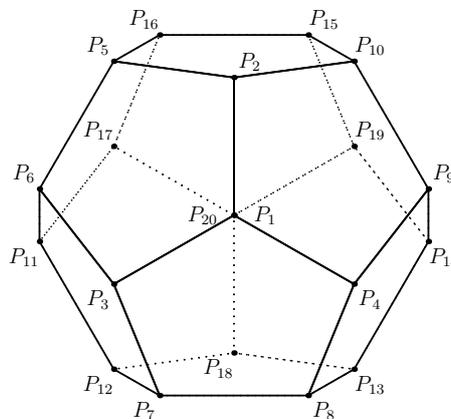


FIGURE 16 – Projection d’un dodécaèdre dans un plan horizontal.

Considérons l’intersection de  $D$  avec le plan vertical passant par  $S_1, S_2, S_{20}$  et  $S_{18}$ . On obtient un hexagone (non régulier) dont les arêtes sont soit des arêtes de  $D$  (2 fois) soit des segments ayant pour longueur  $h$  (4 fois), comme montré dans la Figure 17 (les points  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les milieux d’arêtes de  $D$ ).

On remarque que les sommets de  $D$  apparaissant dans cette intersection sont tous sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ , mais que les points  $Q_1$  et  $Q_2$  ne sont pas sur ce cercle.

Comme  $D$  est le dual d’un icosaèdre, et que l’on sait que l’angle diédral de ce dernier est  $\pi - \alpha = \pi - \arcsin(\frac{2}{3})$ , l’angle entre les vecteurs normaux de deux faces adjacentes de l’icosaèdre est  $\alpha$  et cet angle est l’angle au centre de gravité de  $D$  sous-tendant une arête de  $D$ , soit  $\gamma$ . Il s’ensuit que  $\gamma = \alpha = \arcsin(\frac{2}{3})$ .

On peut donc calculer facilement  $\beta$ , puisque  $2 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta = 2 \cdot \pi$ . Il s’ensuit que  $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$ .

La longueur  $E$  d’une arête de  $D$  dans  $\mathbb{R}^3$  peut être calculée à partir de la Figure 17. En effet, la longueur  $\overline{S_1 S_2}$  dans cette figure est  $E$  et on a :

$$\frac{E/2}{R} = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



- de  $P_1$  et soit  $W_i$  son intersection avec  $C'$  ;
- (v) Pour chaque point  $W_i$  défini en (iv), tracer une droite  $d_i$  tangente à  $C'$  en  $W_i$  et définir deux sommets de  $D$  comme étant les deux points de  $d_i$  à distance  $\frac{E}{2}$  de  $W_i$ .
  - (vi) Relier les 20 sommets ainsi créés comme sur la Figure 18.

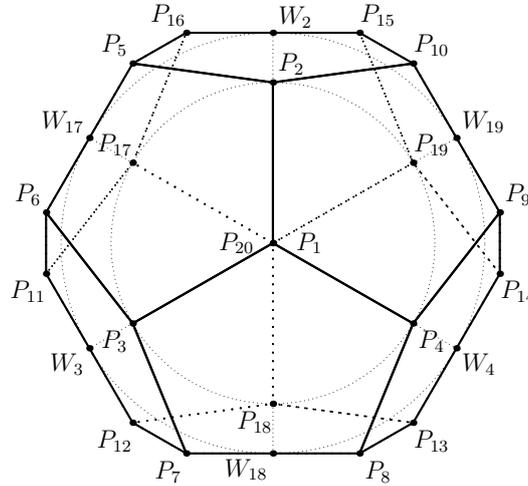


FIGURE 18 – Construction de la projection d'un dodécaèdre dans un plan horizontal.

#### 4.2.2 Construction approximative

La construction de la projection du dodécaèdre décrite dans (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) n'est pas exacte, comme celle de (T. Dias, communication personnelle, 21 mars 2016) puisqu'on montre plus bas que ces deux constructions produisent la même projection.

Commençons par analyser le construction de (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016). Tous les sommets se trouvent sur deux cercles, tout comme dans la construction exacte de la Section 4.2.1. On montre que le quotient de ces deux rayons dans la construction de (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016) n'est pas égal au quotient des deux rayons de la construction exacte. En partant du dessin de la construction donnée (voir Figure 19), il est immédiat que si l'on suppose que les petits cercles de construction (en trait plein dans la figure) ont un rayon unitaire, alors  $\overline{P_1Q_2} = 2$ .

Pour calculer  $R_1 = \overline{P_1P_2}$ , on calcule d'abord  $\overline{P_2Q_2}$ . Pour ce faire, on observe que le triangle  $Q_3Q_4Q_2$  est isocèle en  $Q_4$  et donc la projection orthogonale  $T_1$  de  $Q_4$  sur  $Q_2Q_3$  satisfait  $\overline{Q_2T_1} = \overline{Q_3T_1}$ . Comme les triangles  $Q_3Q_2P_1$  et  $Q_3T_1Q_4$  sont semblables, on a donc aussi  $\overline{Q_4T_1} = 1$  (cela prouve incidemment que  $T_1$  est le point de tangence de  $Q_2Q_3$  avec le cercle centré en  $Q_4$ , une observation qui sera utile pour analyser la seconde construction). Comme les triangles  $Q_3Q_4Q_2$  et  $Q_{12}Q_{11}Q_2$  sont isométriques, on a  $\overline{T_1Q_{11}} = \frac{3}{2} \cdot \overline{Q_2Q_{11}}$ . De plus, les triangles  $Q_4T_1Q_{11}$  et

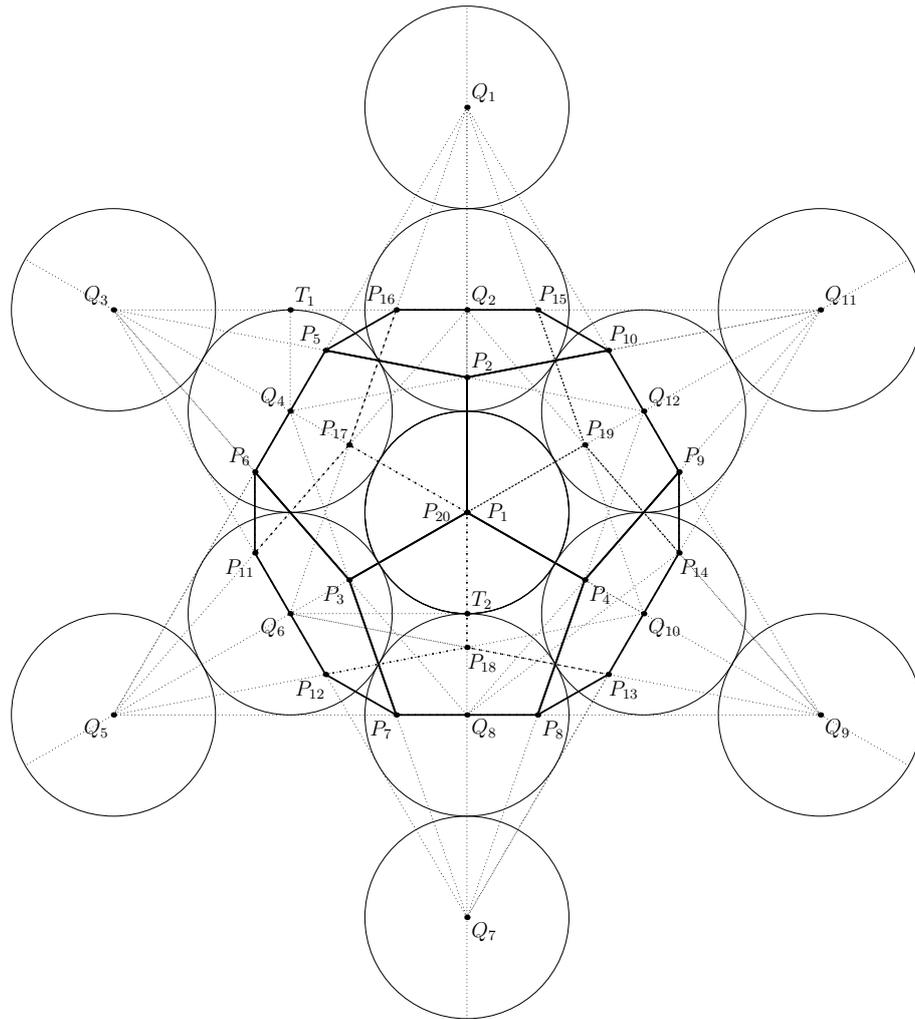


FIGURE 19 – Approximation de la projection d’un dodécaèdre dans un plan horizontal (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016).

$P_2Q_2Q_{11}$  sont semblables, d’où

$$\frac{\overline{Q_4T_1}}{\overline{T_1Q_{11}}} = \frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{Q_2Q_{11}}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}\overline{Q_2Q_{11}}} = \frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{Q_2Q_{11}}} \Rightarrow \overline{P_2Q_2} = \frac{2}{3}.$$

On a donc  $R_1 = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1Q_2} - \overline{P_2Q_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ .

Pour calculer  $R_2 = \overline{P_1P_{16}}$ , on calcule tout d’abord  $\overline{Q_2P_{16}}$ . Pour ce faire, soit  $T_2$  la projection orthogonale de  $Q_6$  sur  $P_1P_{18}$ . Comme l’angle  $\angle T_2P_1Q_6 = \frac{\pi}{3}$  et  $\overline{P_1Q_6} = 2$ , on a

$$\overline{P_1T_2} = \overline{P_1Q_6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \overline{Q_6T_2} = \overline{P_1Q_6} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Comme les triangles  $Q_1Q_6T_2$  et  $Q_1P_{16}T_2$  sont semblables, on a

$$\frac{\overline{Q_6T_2}}{\overline{T_2Q_1}} = \frac{\overline{P_{16}Q_2}}{\overline{Q_1Q_2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\overline{P_{16}Q_2}}{2} \Rightarrow \overline{P_{16}Q_2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Comme le triangle  $P_1Q_2P_{16}$  est rectangle en  $Q_2$ , on obtient

$$R_2 = \sqrt{P_1Q_2^2 + P_{16}Q_2^2} = \sqrt{2^2 + \frac{12}{25}} = \frac{4\sqrt{7}}{5}.$$

On remarque que dans la construction exacte donnée dans la Section 4.2.1, les rayons des cercles de construction et la longueur d'arête  $E$  de  $D$  sont donnés en fonction du rayon  $R$  de la sphère contenant tous les sommets du dodécaèdre :

$$R_p = \frac{2}{3} \cdot R, \quad R_g = \frac{3+\sqrt{5}}{6} \cdot R \quad \text{et} \quad E = 2 \cdot R \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}.$$

On a  $R_1 = R_p$  et

$$R_2 = \sqrt{R_g^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2} = R \cdot \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{36} + \frac{3-\sqrt{5}}{6}} = R \cdot \frac{\sqrt{32}}{6} = R \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Comparant les quotients  $\frac{R_2}{R_1}$  dans la construction exacte et celle de (T. Dias, communication personnelle, 9 février 2016), on a pour la première

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{2} \cong 1.41.$$

alors que pour la seconde, on a

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{5} \cong 1.59.$$

Passons maintenant à la construction de (T. Dias, communication personnelle, 21 mars 2016), voir Figure 19. Il est facile de voir que les cercles de construction sont presque identiques. En comparant les figures 19 et 20, on voit que les cercles centrés en  $Q_1, Q_3, Q_5, Q_7, Q_9$  et  $Q_{11}$  dans la première figure sont absents de la seconde, alors que cette dernière à des cercles centrés en  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  et  $R_6$ . En effet, les points  $Q_1, Q_3, Q_5, Q_7, Q_9$  et  $Q_{11}$  de la seconde figure sont identiques aux points ayant les même noms dans le première figure. Cela peut se voir pour le point  $Q_3$  (le raisonnement est similaire pour les autres points) qui est défini dans la seconde figure comme intersection de la droite supportant  $P_1P_{17}$  et la droite  $d$  passant par  $Q_2$  et tangente au cercle centré en  $Q_4$ . Comme montré plus haut sur la Figure 19, la droite  $Q_2Q_3$  sur cette figure est bien tangente au cercle centré en  $Q_4$ .

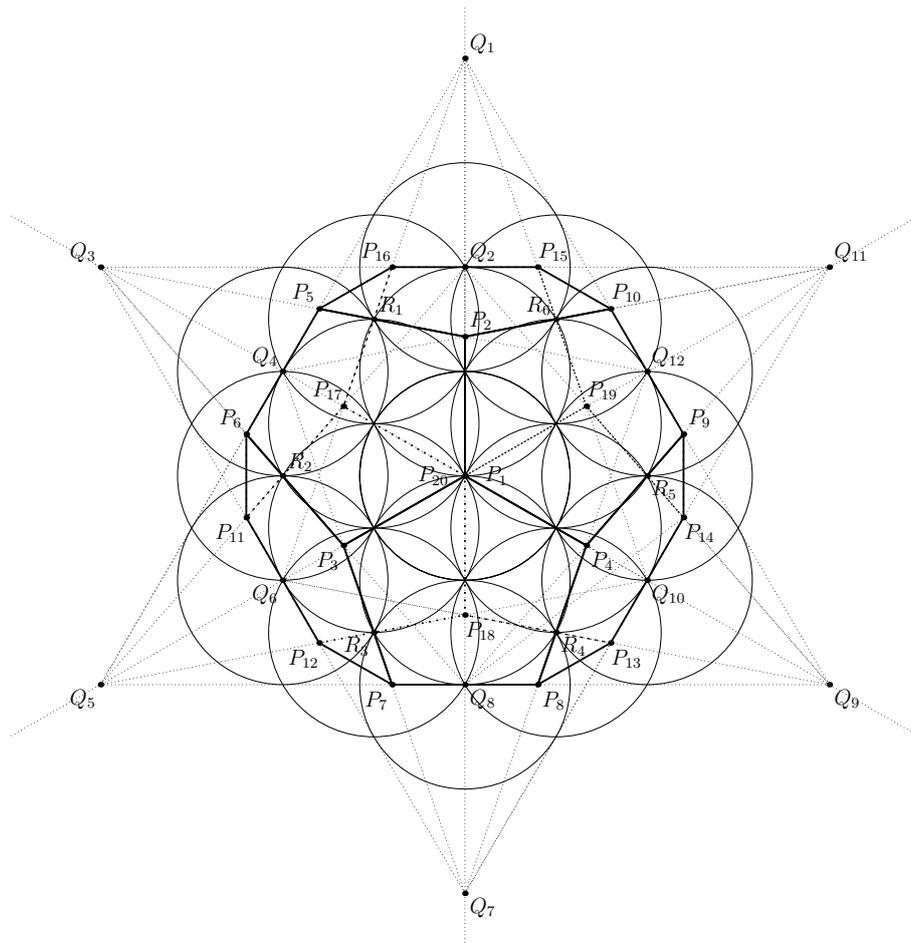


FIGURE 20 – Approximation de la projection d’un dodécaèdre dans un plan horizontal (T. Dias, communication personnelle, 21 mars 2016).

## 5 Exercices

Les exercices présentés dans cette section sont des propositions liées aux concepts développés dans les sections précédentes. Pour éviter trop de redondance, nous ne proposons pas des exercices dont les constructions ou calculs seraient les mêmes que dans ces sections.

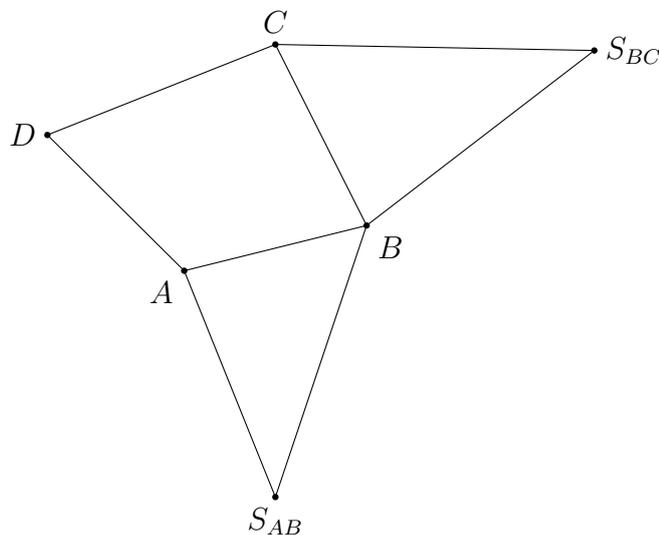
Les Exercices 5.1–5.5 introduisent des concepts de géométrie descriptive en prenant comme point de départ les projections orthogonales de solides de l’espace, en particulier du dodécaèdre et de l’icosaèdre réguliers. Quelques éléments théoriques sont esquissés, mais notre propos n’est pas de développer un cours complet ici.

Les Exercices 5.6–5.12 proposent d’explorer les sections planes du dodécaèdre et de l’icosaèdre réguliers. Les différentes projections orthogonales de ces solides se révèlent être des outils utiles pour cette étude. Dans ces exercices, nous considérons tacitement que les polyèdres sont “pleins” afin d’admettre les faces comme intersections particulières.

Après chaque exercice, des *éléments de solutions* sont proposés, ainsi que des *commentaires* sur certains aspects didactiques ou mathématiques — lorsque l’exercice s’y prête.

**Exercice 5.1.** On considère une pyramide à base carrée  $ABCD$  et de sommet  $S$ , dont une partie du développement est donnée ci-dessous (les points  $S_{AB}$  et  $S_{BC}$  viendront se recoller en le sommet  $S$  de la pyramide).

- Effectuer un relèvement de la face triangulaire  $BAS_{AB}$  autour de  $AB$ , et de la face  $CBS_{BC}$  autour de  $BC$ , et en déduire l'emplacement de la projection orthogonale  $P$  du sommet  $S$  sur le plan horizontal.
- Construire le développement des deux faces manquantes  $DCS_{CD}$  et  $ADS_{DA}$ .



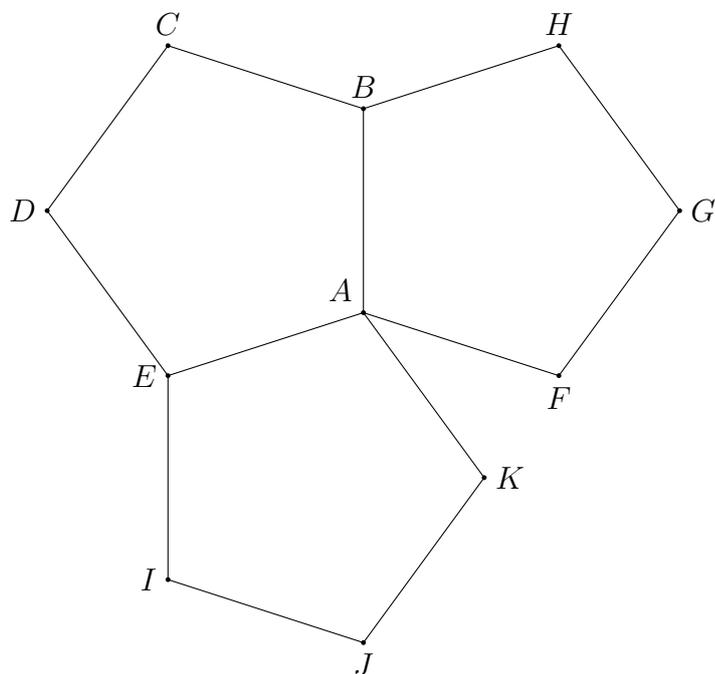
**Élément de solution.** Lors de sa rotation autour de l'axe  $AB$ , le point  $S_{AB}$  suivra, vu de dessus, une trajectoire orthogonale à  $AB$ . De même pour le sommet  $S_{BC}$ . Les deux trajectoires s'intersecteront au point  $P$  cherché.

**Commentaire.** Cet exercice est une première introduction aux techniques de relèvement d'une portion de surface autour d'un axe de rotation horizontal. En particulier, il illustre le fait que deux relèvements simultanés (ici, des faces  $BAS_{AB}$  et  $CBS_{BC}$ ) peuvent permettre de déterminer la projection sur le plan horizontal d'un sommet d'un solide en 3 dimensions.

**Exercice 5.2** (dodécaèdre posé). On considère trois pentagones réguliers convexes  $ABCDE$ ,  $BAFGH$ , et  $AEIJK$  situés dans un plan horizontal de l'espace et vus de dessus (voir ci-dessous).

- On fait subir une rotation d'axe  $AB$  au pentagone  $BAFGH$ , et une rotation d'axe  $EA$  au pentagone  $AEIJK$ . Déterminer où se situent, vus de dessus, les points  $S$  et  $T$  qui se trouvent simultanément sur la trajectoire de  $F$  et de  $K$  lors de leurs rotations respectives.

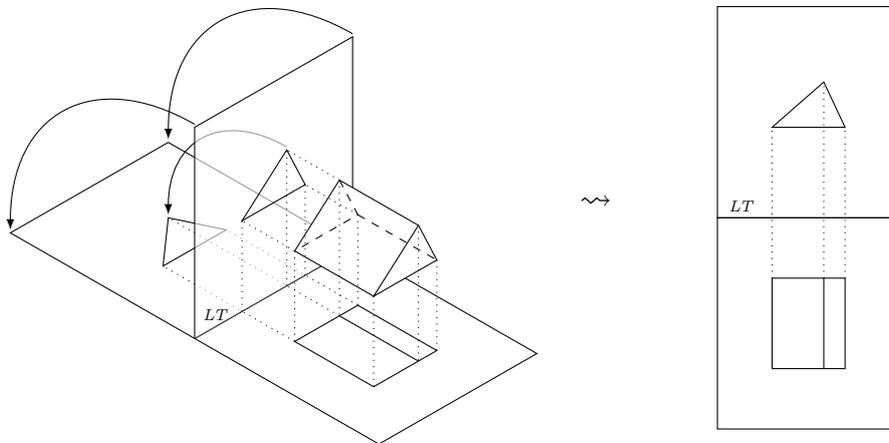
- (b) Déterminer la “vue de dessus” du segment  $[FG]$  lorsque  $F$  est confondu avec  $S$ .
- (c) Construire la “vue de dessus” des pentagones  $BAFGH$  et  $AEIJK$  au moment où, dans leurs rotations respectives, ils partagent une arête commune.
- (d) Construire, en utilisant le point précédent, la “vue de dessus” d’un “panier”, dont le fonds serait le pentagone  $ABCDE$ , et les côtés seraient les relèvements de cinq pentagones réguliers partageant chacun une arête commune avec  $ABCDE$ .
- (e) Construire la projection orthogonale sur un plan horizontal d’un dodécaèdre régulier dont une des faces serait  $ABCDE$ .



**Commentaire.** Cet exercice propose la construction de la projection orthogonale d’un dodécaèdre régulier sur un plan horizontal (“vu de dessus”). Le fait que deux tels dodécaèdres disposés symétriquement de part et d’autre du plan horizontal donnent la même projection est suggéré (mais pas poursuivi) par la construction des deux points  $S$  et  $T$  en (a).

**Plan vertical et vue de face.** Pour compléter la vue de dessus d’un solide présentée dans la première partie du projet, nous proposons de considérer une *vue de face*, qui est la projection orthogonale du solide sur un plan perpendiculaire au premier, avec le solide toujours placé entre ce plan et l’observateur. L’intersection des deux plans est représentée par une droite appelée *ligne de terre*, et dénotée par l’abréviation  $LT$ . En rabattant le plan vertical sur le plan horizontal autour de la ligne de terre, nous obtenons la représentation simultanée des deux projections : la figure suivante illustre le principe de ce rabattement dans le cas d’un prisme à base triangulaire ;

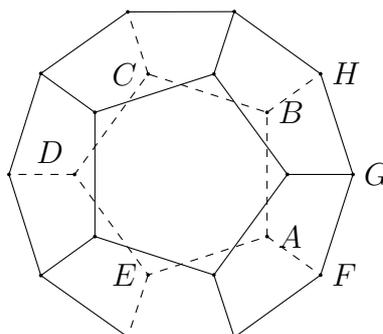
à gauche, la représentation en perspective axonométrique de départ est donnée, et à droite, les deux projections orthogonales résultantes sont représentées vues de dessus après rabattement du plan vertical.



**Exercice 5.3** (dodécaèdre sur la tranche). On considère la vue de dessus d'un dodécaèdre dont la face  $ABCDE$  appartient à un plan horizontal. Ce dodécaèdre est placé devant un plan vertical orthogonal à l'arête  $[AB]$ .

- (a) Construire la vue de face de  $ABCDE$ .
- (b) Représenter la vue de dessus de la face  $BAFGH$  du dodécaèdre rabattue dans le plan horizontal.
- (c) Représenter la vue de face de la rotation de  $BAFGH$  autour de  $AB$ .
- (d) Dessiner la vue de face du dodécaèdre.

*LT*

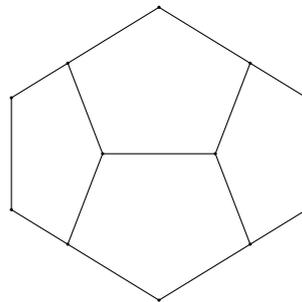


**Éléments de solution.** Toutes les vues de face des sommets du dodécaèdre seront placés sur une perpendiculaire à la ligne de terre passant par leur vue de dessus. De plus, lors de leur rotation autour de l'axe  $AB$ , les sommets  $FGH$  suivront, vus de face, une trajectoire circulaire centrée en la vue de face de  $AB$  (qui est réduite à un point). Ces deux constructions permettent de déterminer la vue de face de  $BAFGH$ , puis, par symétrie, les vues de face des autres sommets du dodécaèdre.

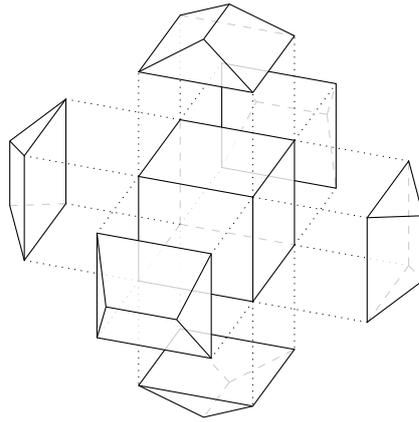
**Commentaires.** Cet exercice propose la construction de la projection orthogonale “manquante” d'un dodécaèdre régulier. En effet, nous avons déjà le dodécaèdre suspendu (un diamètre orthogonal au plan de projection) et le dodécaèdre posé (une face parallèle au plan de projection) par l'exercice précédent. Il ne manque que la situation où une droite passant par le milieu de deux arêtes opposées est perpendiculaire au plan de projection pour obtenir toutes les projections symétriques du solide.

Le fait que seules 4 faces sont visibles par l'observateur (contre 6 dans les cas suspendu et posé) n'est pas immédiat à justifier (voir Exercice 5.4 ou Figure 26). La vue de face proposée ci-dessus donne des outils permettant de mieux comprendre cette situation.

**Exercice 5.4** (dodécaèdre par les toits). La projection orthogonale d'un dodécaèdre sur un plan perpendiculaire à la droite passant par le milieu de deux arêtes opposées est la suivante :



- (a) Représenter sur la projection ci-dessus l'intersection du dodécaèdre avec un plan parallèle au plan de projection, de telle sorte que cette intersection forme un carré.
- (b) Dédire de (a) que le dodécaèdre régulier possède un cube inscrit dont les sommets sont confondus avec certains sommets du dodécaèdre.
- (c) Dédire de (b) que le dodécaèdre régulier peut être obtenu en ajoutant des “toits” à chaque face d'un cube :



(d) On considère un dodécaèdre dont les arêtes sont de longueur 1. Déterminer la longueur d'une arête du cube inscrit. Déterminer aussi la hauteur de chacun des toits.

**Éléments de solution.** La longueur d'une arête du cube sous-jacent au dodécaèdre d'arête de longueur 1 est le nombre d'or  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , puisqu'il s'agit d'un segment reliant deux sommets non-consécutifs d'une face pentagonale du solide régulier. La hauteur d'un toit se trouve en utilisant le théorème de Pythagore deux fois (ou plus, selon quelles arêtes d'un toit sont utilisées dans le raisonnement); notons que cette hauteur peut aussi se mesurer directement sur la projection orthogonale proposée en début d'exercice.

**Commentaire.** Cet exercice sur une construction classique du dodécaèdre à partir du cube propose une approche peu visitée, partant d'une projection orthogonale du dodécaèdre pour justifier le cube sous-jacent (une telle projection orthogonale est notamment proposée à l'Exercice 5.3). Une approche plus classique pourrait être la suivante : on considère un cube sur lequel on construit des "toits" dont les arêtes sont de la même longueur que ceux du cube ; démontrer que les pans des toits posés sur des faces adjacentes du cube appartiennent à un même plan (un problème qui peut se résoudre par trigonométrie ou géométrie vectorielle par exemple).

**Solide dual d'un polyèdre régulier.** Le *dual* d'un polyèdre régulier est obtenu de la manière suivante :

- ses *sommets* sont les centres de symétrie des faces du polyèdre d'origine ;
- deux sommets sont reliés par une *arête* si les faces dont ils proviennent sont adjacentes ;
- les arêtes du nouveau solide en forment une *face* si leurs extrémités appartiennent à des faces du solide d'origine qui se rencontrent en un sommet.

**Exercice 5.5** (dodécaèdre et icosaèdre duaux).

- (a) Déterminer le solide dual du dodécaèdre.
- (b) Dans toutes les représentations du dodécaèdre de ce document, construire le solide dual.

- (c) Déterminer le solide dual de l'icosaèdre.
- (d) Dans toutes les représentations de l'icosaèdre de ce document, construire le solide dual.

**Éléments de solution.** Pour déterminer le centre de symétrie des projections des faces des polyèdres réguliers en position quelconque, il faut utiliser les médianes par chaque sommet ; pour construire ces médianes, il faut utiliser que les projections orthogonales préservent les rapports de section.

**Commentaire.** Cet exercice permet de déterminer rapidement les projections orthogonales (solide suspendu, posé, ou sur la tranche) de l'icosaèdre si celles du dodécaèdre sont connues — ou inversement. Cela donne une autre approche que celles proposées jusqu'ici.

**Exercice 5.6.** Soit  $P$  un polygone obtenu en prenant l'intersection d'un plan horizontal avec l'icosaèdre suspendu comme dessiné ci-dessous.

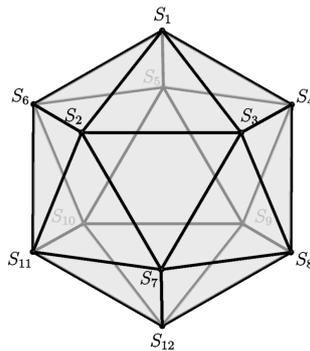


FIGURE 21 – Les sommets  $S_1$  et  $S_{12}$  sont antipodaux et le segment les reliant est vertical.

- (a) Quel est le nombre maximum de côtés que  $P$  peut avoir ?
- (b) Est-il possible que  $P$  soit
- (i) un triangle équilatéral ?
  - (ii) un carré ?
  - (iii) un pentagone régulier ?
  - (iv) un hexagone régulier ?
  - (v) un heptagone régulier ?
  - (vi) un octogone régulier ?
  - (vii) un enneagone régulier ?
  - (viii) un décagone régulier ?
- (c) Répéter la question (b) pour des polygones arbitraires (réguliers ou non réguliers).

- (d) Répéter la question (a) mais en prenant l'intersection de n'importe quel plan (donc pas forcément horizontal) avec l'icosaèdre.
- (e) Répéter la question (b) mais en prenant l'intersection de n'importe quel plan (donc pas forcément horizontal) avec l'icosaèdre.

**Éléments de solution.** Un plan horizontal qui intersecte l'icosaèdre suspendu le fait soit en

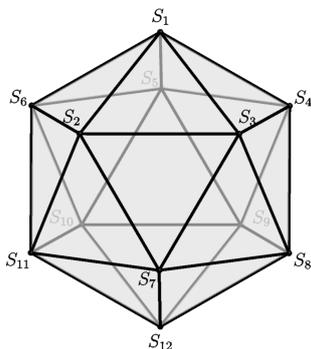
- un point ;
- un pentagone régulier ;
- un décagone régulier.

Un plan arbitraire ne peut pas intersecter l'icosaèdre en un polygone ayant plus de 10 côtés.

Un plan arbitraire peut générer en plus un triangle équilatéral (prendre un plan supportant une des faces) ou un hexagone régulier (prendre le plan passant par  $S_1$ ,  $S_9$  et  $S_{11}$ ), un octogone non-régulier (prendre un plan orthogonal au segment joignant les milieux de deux arêtes antipodales) ou un enneagone régulier (prendre un plan parallèle à une des faces et le pousser un peu vers l'intérieur de l'icosaèdre ; cela génère un enneagone non-régulier ; il y a une unique position du plan qui génère un enneagone régulier).

**Commentaires.** Ci-dessus, nous donnons des esquisses de preuve seulement, les preuves formelles étant *a priori* compliquées. Notons que la projection orthogonale du squelette de l'icosaèdre sur un plan horizontal, sur un plan parallèle à une face ou sur un plan orthogonal au segment joignant les milieux de deux arêtes antipodales peut aider à justifier les réponses ci-dessus.

**Exercice 5.7.** Soit  $P$  le polygone obtenu en prenant l'intersection du plan passant par  $S_1$ ,  $S_5$ ,  $S_7$  et  $S_{12}$  avec l'icosaèdre suspendu comme dessiné ci-dessous.



On suppose que toutes les arêtes de l'icosaèdre ont longueur  $e = 1$ . On suppose connu que la hauteur  $h$  d'un triangle équilatéral ayant des arêtes de longueur 1 est  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et que la diagonale  $d$  d'un pentagone régulier convexe ayant des arêtes de longueur 1 est  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

- (a) Combien de côtés à  $P$  ?

- (b) Quelles sont les longueurs des côtés de  $P$  ?
- (c) Combien de côtés de  $P$  sont verticaux ?
- (d) Donner une marche à suivre pour dessiner  $P$  dans le plan à la règle et au compas de manière précise (sans entrer des les détails pour dessiner des segments de longueur spécifiées).

**Éléments de solution.**  $P$  est un hexagone non régulier. Il a quatre côtés dont la longueur est  $h$  et deux côtés dont la longueur est  $e$  selon la séquence  $hhehhe$ . Il a deux côtés verticaux de longueur  $h$  dont l'enveloppe convexe est un rectangle de côté  $h$  et  $h_p$ , où  $h_p$  est la distance entre un sommet du pentagone régulier convexe de côtés 1 et le côté opposé. On a

$$h_p = \sqrt{d^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{4}}$$

**Exercice 5.8.** On s'intéresse au polygone  $P$  obtenu par la projection sur un plan horizontal d'un icosaèdre. Soit  $n_{\min}$  le nombre minimum possible de côtés de  $P$  et soit  $n_{\max}$  le nombre maximum possible de côtés de  $P$ .

- (a) Quelle est la valeur de  $n_{\min}$  ?
- (b) Quelle est la valeur de  $n_{\max}$  ?
- (c) Peut-on trouver une projection orthogonale ayant  $n_{\min}$  côtés qui est identique à l'intersection de l'icosaèdre avec un plan bien choisi ?
- (d) Peut-on trouver une projection orthogonale ayant  $n_{\max}$  côtés qui est identique à l'intersection de l'icosaèdre avec un plan bien choisi ?

**Éléments de solution.** Le polygone  $P$  a au moins 6 côtés. En mettant les arêtes  $[S_1S_2]$  et  $[S_9S_{12}]$  horizontales et dans un même plan vertical (c'est-à-dire en "suspendant" l'icosaèdre par l'arête  $[S_1S_2]$ ), on obtient la projection de la Figure 22, l'icosaèdre "sur la tranche" (comparer avec le dodécaèdre sur la tranche de l'Exercice 5.3). Le polygone délimitant de cette projection peut être obtenu comme l'intersection de l'icosaèdre avec le plan passant par les sommets  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_7$  et  $S_{11}$ .

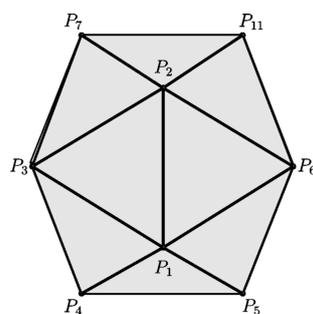


FIGURE 22 – Les arête  $[S_1S_2]$  et  $[S_9S_{12}]$  sont horizontales.

Le polygone  $P$  a au plus 10 côtés. Par exemple, la projection sur un plan horizontal de l'icosaèdre suspendu est donnée dans la Figure 23. Comme les sommets  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_7$  et  $S_8$  ne sont pas coplanaires, cette projection ne peut être obtenue comme l'intersection d'un plan avec l'icosaèdre. Notons que cette projection est *semblable* (mais non identique) à l'intersection de l'icosaèdre avec le plan médiateur de deux sommets opposés.

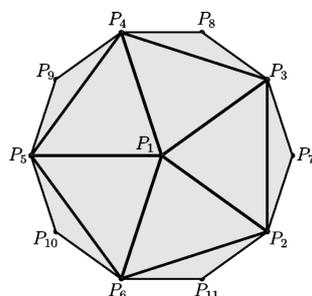


FIGURE 23 – Projection sur un plan horizontal de l'icosaèdre suspendu.

**Exercice 5.9.** Soit  $P$  un polygone obtenu en prenant l'intersection d'un plan horizontal avec l'icosaèdre posé comme dessiné ci-dessous. Vrai ou faux ?  $P$  peut être un hexagone régulier.

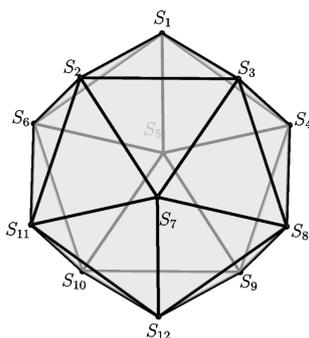


FIGURE 24 – Les faces  $S_1S_2S_3$  et  $S_9S_{10}S_{12}$  sont horizontales.

**Éléments de solution.** L'affirmation est vraie. Le plan horizontal passant par  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_7$  (ou celui passant par  $S_5$ ,  $S_8$  et  $S_{11}$ ) génère un hexagone régulier de côté  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Exercice 5.10.** Soit  $P$  un polygone obtenu en prenant l'intersection d'un plan horizontal avec le dodécaèdre suspendu comme dessiné ci-dessous.

- (a) Quel est le nombre maximum de côtés que  $P$  peut avoir ?
- (b) Est-il possible que  $P$  soit
  - (i) un triangle équilatéral ?
  - (ii) un carré ?
  - (iii) un pentagone régulier ?

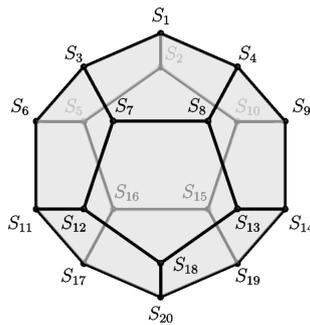


FIGURE 25 – Les sommets  $S_1$  et  $S_{20}$  sont antipodaux et le segment les reliant est vertical.

- (iv) un hexagone régulier ?
  - (v) un heptagone régulier ?
  - (vi) un octogone régulier ?
  - (vii) un enneagone régulier ?
  - (viii) un décagone régulier ?
- (c) Répéter la question (b) pour des polygones pouvant être réguliers ou non réguliers.
- (d) Répéter la question (a) mais en prenant l'intersection de n'importe quel plan (donc pas forcément horizontal) avec l'icosaèdre.
- (e) Répéter la question (b) mais en prenant l'intersection de n'importe quel plan (donc pas forcément horizontal) avec l'icosaèdre.

**Éléments de solution.** Un plan horizontal intersectant le dodécaèdre suspendu le fait soit en

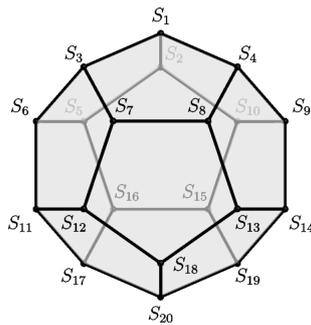
- un point ;
- un triangle équilatéral ;
- un hexagone non-régulier ou régulier.

Un plan arbitraire ne peut pas intersecter le dodécaèdre en un polygone ayant plus de 10 côtés (prendre un plan parallèle à une des faces et passant par le centre de symétrie).

Un plan arbitraire peut générer en plus un décagone régulier (prendre un plan parallèle à une des faces passant par le centre de symétrie), un octogone non-régulier (prendre un plan orthogonal au segment joignant les milieux de deux arêtes antipodales), un pentagone régulier (prendre un plan supportant une des faces), un carré (prendre le plan passant par  $S_3, S_4, S_5$  et  $S_{10}$ ) ou un rectangle (prendre le plan précédent et le pousser un peu en direction de l'arête  $[S_1S_2]$ ).

**Commentaires.** Seules des esquisses de preuve sont suggérées ci-dessus, les preuves formelles étant *a priori* compliquées.

**Exercice 5.11.** Soit  $P$  le polygone obtenu en prenant l'intersection du plan passant par  $S_1, S_2, S_{18}$  et  $S_{20}$  avec le dodécaèdre suspendu comme dessiné ci-dessous.



On suppose que toutes les arêtes du dodécaèdre ont longueur  $e = 1$ . On suppose connu que l'angle diédral  $\psi$  du dodécaèdre est tel que  $\psi = \pi - \arctan(2) \cong 116.56^\circ$  et que la diagonale  $d$  d'un pentagone régulier convexe ayant des arêtes de longueur 1 est  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

- Combien de côtés à  $P$  ?
- Quelles sont les longueurs des côtés de  $P$  ?
- Combien de côtés de  $P$  sont verticaux ?
- Dessiner  $P$  dans le plan de manière précise.

**Éléments de solution.** Appelons  $h_p$  la distance entre un sommet du pentagone régulier convexe de côtés de longueur 1 et le côté opposé. On a

$$h_p = \sqrt{\varphi^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{4}}$$

Le polygone  $P$  est un hexagone non régulier. Il a quatre côtés dont la longueur est  $h_p$  et deux côtés dont la longueur est  $e$  selon la séquence  $h_p h_p e h_p h_p e$ . L'angle entre deux côtés adjacents de longueur  $h_p$  est l'angle diédral  $\pi - \arctan(2)$ . Soit  $A$  le point d'adjacence de deux des côtés de longueur  $h_p$  et  $B$  le point d'adjacence des deux autres. Le segment  $[AB]$  est une bissectrice des deux angles diédraux en  $A$  et en  $B$ . Ces observations permettent de dessiner  $P$  de manière exacte.

**Commentaires.** Pour la question (d), on peut aussi seulement demander une marche à suivre pour dessiner  $P$ , sans entrer des les détails pour dessiner  $h_p$  et  $\psi$  à la règle et au compas seulement.

**Exercice 5.12.** On s'intéresse au polygone  $P$  obtenu par la projection sur un plan horizontal d'un dodécaèdre. Soit  $n_{\min}$  le nombre minimum possible de côtés de  $P$  et soit  $n_{\max}$  le nombre maximum possible de côtés de  $P$ .

- Quelle est la valeur de  $n_{\min}$  ?
- Quelle est la valeur de  $n_{\max}$  ?

- (c) Peut-on trouver une projection ayant  $n_{\min}$  côtés qui est identique à l'intersection du dodécaèdre avec un plan bien choisi ?
- (d) Peut-on trouver une projection ayant  $n_{\max}$  côtés qui est identique à l'intersection du dodécaèdre avec un plan bien choisi ?

**Éléments de solution.** Le polygone  $P$  a au moins 6 côtés. En mettant les arêtes  $[S_1S_2]$  et  $[S_{18}S_{20}]$  horizontales et dans un même plan vertical (c'est-à-dire en "suspendant" le dodécaèdre par l'arête  $[S_1S_2]$ ), on obtient la projection de la Figure 26, le dodécaèdre sur la tranche (voir Exercice 5.3). Le polygone délimitant peut être obtenu comme l'intersection du dodécaèdre avec le plan passant par les sommets  $S_7, S_8, S_{15}$  et  $S_{16}$ .

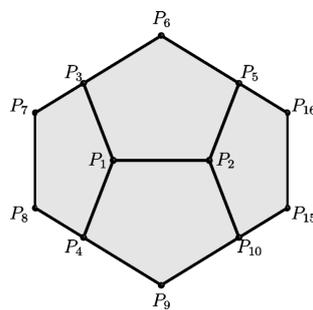


FIGURE 26 – Les arête  $[S_1S_2]$  et  $[S_9S_{12}]$  sont horizontales.

Le polygone  $P$  a au plus 12 côtés. La projection sur un plan horizontal du dodécaèdre suspendu, donnant un tel polygone, est donnée dans la Figure 27. Une section plane du dodécaèdre ayant au plus 10 côtés (voir Exercice 5.10), ce polygone  $P$  n'en est pas une.

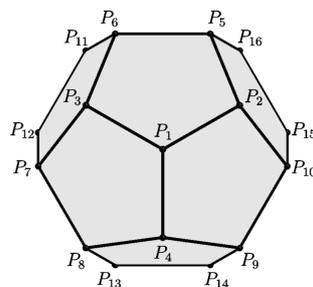


FIGURE 27 – Projection sur un plan horizontal du dodécaèdre suspendu.

## Références

Javary, A. (1881–1882). *Traité de géométrie descriptive. La ligne droite, le plan, les polyèdres.* Paris, France : C. Delagrave.

Shreevatsa R (4 novembre 2011). Not all best rational approximations are the convergents of the continued fraction! [Billet de blogue]. Repéré à <https://shreevatsa.wordpress.com/2011/01/10/>